Λύσεις ασκήσεων - Φυλλάδιο I

1) $2xy\ln y\,dx + (x^2+y^2\sqrt{y^2+1})\,dy = 0 \quad , y>0 \quad (1)$

$M(x,y) = 2xy\ln y$

$N(x,y) = x^2+y^2\sqrt{y^2+1}$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x\ln y + 2x$ και $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$ Άρα $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

Η Δ.Ε δεν είναι πλήρης. Παρατηρούμε όμως ότι:

$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{2x\ln y + 2x - 2x}{-2xy\ln y} = -\frac{1}{y}$, εξαρτάται μόνο από το y.

Άρα υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler $\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = \frac{1}{y}$, $y>0$

Πολλαπλασιάζουμε την αρχική Δ.Ε με $\frac{1}{y}$, οπότε έχουμε

$2x\ln y\,dx + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0 \quad (2)$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{M}(x,y) = 2x\ln y \Rightarrow \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} = \frac{2x}{y} \\ \bar{N}(x,y) = \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1} \Rightarrow \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} = \frac{2x}{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} \Rightarrow \text{η Δ.Ε (2) είναι πλήρης}$$

Επομένως υπάρχει συνάρτηση $F(x,y)$ τέτοια ώστε $\frac{\partial F}{\partial x} = \bar{M}$ και $\frac{\partial F}{\partial y} = \bar{N}$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \bar{M} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2x\ln y \Rightarrow F(x,y) = \int 2x\ln y\,dx + c(y) = x^2\ln y + c(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \bar{N} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1} \Rightarrow \frac{x^2}{y} + c'(y) = \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1} \Rightarrow c'(y) = y\sqrt{y^2+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow c(y) = \int y\sqrt{y^2+1}\,dy + k = \frac{1}{2}\int (y^2+1)^{1/2} d(y^2+1) + k = \frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2} + k$

Άρα $F(x,y) = x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2} + k$

Το γενικό ολοκλήρωμα της (1) είναι $F(x,y) = c \Rightarrow x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2} = c$, $y>0$

$\mu^{-1}(y) = y$, όμως $y>0$.

Άρα το πλήρες ολοκλήρωμα της (1) είναι: $\boxed{x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2} = c, \ y>0}$

2) $y' = \dfrac{3x^2}{3y^2-4}$, $y(1)=0$

Η Δ.Ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών: $(3y^2-4)dy = 3x^2dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y^3 - 4y = x^3 + c$, c αυθαίρετη σταθερά, το γενικό ολοκλήρωμα.

Αρχική συνθήκη $y(1)=0$. Από το γενικό ολοκλήρωμα, για $x=1$ και $y=0$, έχουμε $0 = 1 + c \Rightarrow c=-1$

Άρα το ειδικό ολοκλήρωμα είναι: $y^3-4y = x^3-1$.

Από την Δ.Ε έχουμε ότι η παράγωγος απειρίζεται για $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Άρα $y \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ εφ' όσον το y_0 της αρχικής συνθήκης είναι $y_0 = 0 \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Όταν το $y \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ τότε $\frac{-16}{3\sqrt{3}} < y^3-4y < \frac{16}{3\sqrt{3}}$ άρα $\frac{-16}{3\sqrt{3}} < x^3-1 < \frac{16}{3\sqrt{3}}$

Επομένως $\frac{-16}{3\sqrt{3}}+1 < x^3 < \frac{16}{3\sqrt{3}}+1 \Rightarrow -1{,}28 < x < 1{,}60$

Η λύση στο Π.Α.Τ είναι $\boxed{y^3-4y = x^3-1 \quad \text{για } -1{,}28 < x < 1{,}60.}$

3) $y - xy' = 3 - 2x^2y'$, $y(-1) = 1$

$$y - xy' + 2x^2y' = 3 \Rightarrow y'x(2x-1) + y = 3 \Rightarrow y' + \frac{y}{x(2x-1)} = \frac{3}{x(2x-1)}$$

Είναι γραμμική μη ομογενής με $p(x) = \frac{1}{x(2x-1)}$

Ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x(2x-1)}dx} =$

$$= e^{-\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2}{2x-1}dx} = e^{\ln x^{-1} + \ln(2x-1)} = e^{\ln\left|\frac{2x-1}{x}\right|} = \left|\frac{2x-1}{x}\right|$$

Αρα $\left(\frac{2x-1}{x}\right)y' + \frac{y\,\cancel{(2x-1)}}{x^2\cancel{(2x-1)}} = \frac{3\,\cancel{(2x-1)}}{x^2\cancel{(2x-1)}} \Rightarrow \left[\left(\frac{2x-1}{x}\right)y\right]' = \frac{3}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{2x-1}{x}\right)y = \int \frac{3}{x^2}dx + c = -\frac{3}{x} + c \Rightarrow y(x) = -\frac{3}{2x-1} + \frac{cx}{2x-1}$ γενική λύση

Από την αρχική συνθήκη και την γενική λύση προσδιορίζουμε την σταθερά c.

$$1 = \frac{-3}{-2-1} + \frac{c(-1)}{-2-1} = 1 + \frac{c}{3} \Rightarrow c = 0.$$

Αρα η ειδική λύση είναι: $\boxed{y(x) = \frac{3}{1-2x} \text{ για } x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)}$

4) $y' - e^x y^2 - 3y - 3e^{-x} = 0$ αν $y_1 = \lambda e^{-x}$ είναι μιά λύση της

Η Δ.Ε είναι της μορφής: $y' + f_2(x) y^2 + f_1(x) y + f_0(x) = 0$ Riccati

Εφ' όσον $y_1 = \lambda e^{-x}$ είναι λύση της θα πρέπει να την ικανοποιεί

Άρα $y_1' - e^x y_1^2 - 3y_1 - 3e^{-x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\lambda e^{-x} - e^x \lambda^2 e^{-2x} - 3\lambda e^{-x} - 3e^{-x} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 4\lambda + 3) e^{-x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$

Επομένως $\underline{\underline{y_1(x) = -e^{-x}}}$ ή $y_2(x) = -3e^{-x}$ $[y_2(x) = 3 \cdot y_1(x)]$

Θέτουμε $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{w(x)} = -e^{-x} + \frac{1}{w(x)} \Rightarrow y'(x) = e^{-x} - \frac{w'(x)}{w^2(x)}$

και αντικαθιστούμε στην Δ.Ε.

$$e^{-x} - \frac{w'}{w^2} - e^x\left(e^{-2x} + \frac{1}{w^2} - \frac{2e^{-x}}{w}\right) - 3\left(-e^{-x} + \frac{1}{w}\right) - 3e^{-x} = 0$$

$$\cancel{e^{-x}} - \frac{w'}{w^2} - \cancel{e^{-x}} - \frac{e^x}{w^2} + \frac{2}{w} + \cancel{3e^{-x}} - \frac{3}{w} - \cancel{3e^{-x}} = 0$$

$$-\frac{w'}{w^2} - \frac{e^x}{w^2} - \frac{1}{w} = 0 \Rightarrow w' + w + e^x = 0 \Rightarrow w' + w = -e^x, \quad \mu(x) = e^x$$

$$w'e^x + we^x = -e^{2x} \Rightarrow (we^x)' = -e^{2x} \Rightarrow we^x = -\int e^{2x} dx + c = -\frac{1}{2}e^{2x} + c$$

Άρα $w(x) = -\frac{1}{2}e^x + ce^{-x} = \frac{2ce^{-x} - e^x}{2}$

Άρα $y(x) = -e^{-x} + \frac{2}{2ce^{-x} - e^x}$, $c \in \mathbb{R}$

Η πλήρης λύση της Δ.Ε. είναι: $\boxed{\begin{cases} y(x) = -e^{-x} + \dfrac{2}{2ce^{-x} - e^x}, & c \in \mathbb{R} \\ \text{ή} \quad y(x) = -e^{-x} \end{cases}}$

5) $(1-3xy^2)y' = 3y^3 - 2xy^2$

Η Δ.Ε γράφεται $3y^3 - 2xy^2 + (3xy^2 - 1)y' = 0$ (1)

$M(x,y) = 3y^3 - 2xy^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 9y^2 - 4xy$

$N(x,y) = 3xy^2 - 1 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$

Παρατηρούμε ότι $\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{9y^2 - 4xy - 3y^2}{-y^2(3y-2x)} = \frac{6y^2 - 4xy}{-y^2(3y-2x)} = \frac{2y\cancel{(3y-2x)}}{-y^2\cancel{(3y-2x)}} =$

$= -\frac{2}{y} = g(y)$

Εφόσον προκύπτει συνάρτηση του y έπεται ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(y) = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = \frac{1}{y^2}$ $y \neq 0$

Πολ/ζουμε την (1) με $\frac{1}{y^2}$: $(3y - 2x) + (3x - \frac{1}{y^2})y' = 0$ (2)

$\bar{M}(x,y) = 3y - 2x \Rightarrow \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} = 3$, $\bar{N}(x,y) = 3x - \frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} = 3$

Άρα η Δ.Ε (2) είναι πλήρης. Επομένως υπάρχει συνάρτηση $F(x,y)$ τέτοια ώστε $\frac{\partial F}{\partial x} = \bar{M}$ και $\frac{\partial F}{\partial y} = \bar{N}$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \bar{M} \Rightarrow F(x,y) = \int (3y - 2x)dx + c(y) = 3yx - x^2 + c(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \bar{N} \Rightarrow 3x + c'(y) = 3x - \frac{1}{y^2} \Rightarrow c'(y) = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow c(y) = \frac{1}{y} + k$

Το γενικό ολοκλήρωμα της (2) είναι $F(x,y) = C \Rightarrow 3yx - x^2 + \frac{1}{y} = C$, $y \neq 0$

$\mu^{-1}(y) = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$. Η $y(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι λύση της (1)

Επομένως το πλήρες ολοκλήρωμα της (1) είναι
$$\boxed{\begin{array}{l} 3yx - x^2 + \frac{1}{y} = c, \ c \text{ αυθ.} \\ y(x) = 0 \end{array}}$$

6) $y \cdot x^{y-1} dx + x^y \ln x \, dy = 0 \quad (1) \quad , \quad x > 0.$

$M(x,y) = y x^{y-1} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = x^{y-1} + y \frac{\partial}{\partial y}\left(x^{y-1}\right) = x^{y-1} + y \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{(y-1)\ln x}\right) =$

$= x^{y-1} + y \ln x \cdot x^{y-1} = x^{y-1}\left(1 + y \ln x\right)$

$N(x,y) = x^y \ln x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = y x^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = y x^{y-1} \ln x + x^{y-1} = x^{y-1}\left(1 + y \ln x\right)$

Άρα $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ η Δ.Ε. (1) είναι πλήρης.

Επομένως υπάρχει συνάρτηση $F(x,y)$ τέτοια ώστε $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

$\frac{\partial F}{\partial x} = M \Rightarrow F(x,y) = \int y \cdot x^{y-1} dx + c(y) = x^y + c(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^y + c(y)\right) = x^y \ln x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y \ln x}\right) + c'(y) = x^y \cdot \ln x$

$\Rightarrow \cancel{\ln x \cdot x^y} + c'(y) = \cancel{x^y \cdot \ln x} \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = k$, k αυθ. σταθερά

Άρα το γενικό ολοκλήρωμα της (1) είναι $F(x,y) = C$, το οποίο ταυτίζεται με το πλήρες.

$$\boxed{\begin{array}{ll} x^y = C , & c \text{ αυθ. σταθερά} \\ x > 0. & c > 0. \end{array}}$$

7) $(x+2)\sin y + x\cos y \cdot y' = 0 \quad (1)$

1ος τρόπος : Χωριζομένων μεταβλητών: $x\cos y \cdot y' = -(x+2)\sin y \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\cos y\, dy}{\sin y} = -\dfrac{(x+2)}{x}dx \quad , \sin y \neq 0 \ , \ x \neq 0$

$\displaystyle\int \frac{\cos y}{\sin y}dy = -\int \frac{x+2}{x}dx + c_1 \Rightarrow \ln|\sin y| = -x - 2\ln|x| + c_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|\sin y| + 2\ln|x| = c_1 - x \Rightarrow \ln|x^2 \sin y| = c_1 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^2 \sin y| = e^{c_1}e^{-x} \Rightarrow x^2\sin y = \pm e^{c_1}e^{-x} \Rightarrow x^2 \sin y = ce^{-x}, \ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \sin y = \dfrac{ce^{-x}}{x^2}, \ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ γενικό ολοκλήρωμα

- $\sin y = 0 \Rightarrow y(x) = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ είναι λύσεις της ΔΕ, οι οποίες προκύπτουν από το γενικό ολοκλήρωμα για $c=0$

Άρα το πλήρες ολοκλήρωμα είναι: $\boxed{\sin y = \dfrac{ce^{-x}}{x^2}, \ c \in \mathbb{R}}$

2ος τρόπος : Αναγωγή σε πλήρη

$M(x,y) = (x+2)\sin y \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = (x+2)\cos y$

$N(x,y) = x\cos y \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = \cos y$

$\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{(x+2)\cos y - \cos y}{x\cos y} = \dfrac{(x+1)\cos y}{x\cos y} = \dfrac{x+1}{x} = f(x)$

Εφόσον είναι συνάρτηση μόνο του x, υπάρχει πολ/στής Euler $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$

$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{x+1}{x}dx} = e^x \cdot x$

Πολ/ζουμε την (1) με xe^x: $e^x(x^2+2x)\sin y + x^2e^x\cos y \cdot y' = 0 \quad (2)$

$\bar{M}(x,y) = e^x(x^2+2x)\sin y \rightarrow M_y = e^x(x^2+2x)\cos y$

$\bar{N}(x,y) = x^2e^x\cos y \rightarrow N_x = (2x+x^2)e^x\cos y$

$\Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$ η (2) είναι πλήρης

Άρα υπάρχει $F(x,y)$: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \bar{M}, \ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \bar{N}$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = \bar{N} \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2e^x\cos y \rightarrow F(x,y) = \displaystyle\int x^2e^x\cos y\, dy + k(x) = x^2e^x\sin y + k(x)$

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = \bar{M} \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2e^x\sin y) + k'(x) = e^x(x^2+2x)\cos y \Rightarrow k'(x) = 0 \Rightarrow k(x) = c_1$

Γενικό ολοκλήρωμα, $F(x,y) = c \Rightarrow x^2e^x\sin y = c \Rightarrow \boxed{\sin y = \dfrac{ce^{-x}}{x^2}, \ c \in \mathbb{R}}$

$\equiv$ Πλήρες $\Rightarrow$

8) $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$ (1) Εξίσωση Clairaut

Θέτουμε $y' = p$: $y = xp + \sqrt{1+p^2}$ (2)

Παραγωγίζοντας την (2) ως προς x : $y' = \cancel{p} = \cancel{p} + x\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{2p}{2\sqrt{1+p^2}}\dfrac{dp}{dx} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

α) $\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$. Απο την (2) εχουμε: $y = xc + \sqrt{1+c^2}$: γενική λύση

β) $x + \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ $-\infty < p < +\infty$ (3)

Επομένως $x^2 = \dfrac{p^2}{(\sqrt{1+p^2})^2} \Rightarrow x^2(1+p^2) = p^2 \Rightarrow p^2(1-x^2) = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow p = \pm\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$

Είναι πάντοτε $xp \leq 0$ άρα η αντίστροφη της (3) είναι

$$p = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

Απο την εξίσωση (2) εχουμε: $y = \dfrac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{1-x^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$, $-1<x<1$

Η λύση $y = \sqrt{1-x^2}$, $|x|<1$ ειναι ιδιάζουσα λύση της (1) και περιβάλλουσα της οικογένειας ευθειών $y = xc + \sqrt{1+c^2}$, c αυθ. σταθ.

Η πλήρης λύση είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} &y(x) = xc + \sqrt{1+c^2} \\ \text{και } &y(x) = \sqrt{1-x^2}, \ |x|<1 \end{aligned}}$$

9) $2xyy' + x^2 + y^2 = 0 \quad y(1) = 1$

1ος τρόπος: Εξίσωση Bernoulli: $y' + \frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2yy' + \frac{y^2}{x} = -x$ Θέτουμε $u = y^2 \Rightarrow u' = 2yy'$

Άρα $u' + \frac{u}{x} = -x$ γραμμική με ολοκλ. παράγοντα $\mu(x) = x$

$u'x + u = -x^2 \Rightarrow (ux)' = -x^2 \Rightarrow ux = -\int x^2 dx + c \Rightarrow u = -\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$

$\Rightarrow u(x) = \frac{3c - x^3}{3x} \Rightarrow y^2 = \frac{3c - x^3}{3x} \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{\frac{3c - x^3}{3x}}$, c αυθ. σταθ.

Από την γενική λύση για $x=1$ και $y=1$: $1 = \pm\sqrt{\frac{3c-1}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = 3c - 1 \Rightarrow c = 4/3$

Άρα $y(x) = \pm\sqrt{\frac{4 - x^3}{3x}}$, όμως $y_0 = 1 \geq 0$ επομένως η ειδική λύση είναι με το θετικό πρόσημο: $y(x) = \sqrt{\frac{4 - x^3}{3x}}$

Πεδίο ορισμού: για $x > 0$ και $4 - x^3 > 0 \Rightarrow x < 2^{2/3}$ Άρα $0 < x < 2^{2/3}$

Ειδική λύση είναι $\boxed{y(x) = \sqrt{\frac{4 - x^3}{3x}}, \quad x \in (0, 2^{2/3})}$

2ος τρόπος: $(x^2 + y^2) + 2xyy' = 0$

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow M_y = 2y \\ N(x,y) = 2xy \Rightarrow N_x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \text{είναι πλήρης}$$

Άρα υπάρχει $F(x,y)$ τέτοια ώστε $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ και $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

$\frac{\partial F}{\partial x} = M \Rightarrow F(x,y) = \int (x^2 + y^2)\, dx + c(y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + c(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy^2 + c(y)\right) = 2xy \Rightarrow 2xy + c'(y) = 2xy \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = k$

Άρα το γενικό ολοκλήρωμα είναι $F(x,y) = c \Rightarrow \frac{x^3}{3} + xy^2 = c \Rightarrow y^2 = \frac{3c - x^3}{3x}$

$\Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{\frac{3c - x^3}{3x}}$

3ος τρόπος: **Ομογενής**: Θέτουμε $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$$2x^2u(u'x+u) + x^2 + x^2u^2 = 0 \Rightarrow x2uu' + 2u^2 + 1 + u^2 = 0 \quad \text{για } x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2u\,du}{3u^2+1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{d(3u^2+1)}{3u^2+1} = -3\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|3u^2+1| = -3\ln|x| + c_1 \Rightarrow \ln\left|(3u^2+1)\cdot x^3\right| = c_1 \Rightarrow$$

$$\left|(3u^2+1)x^3\right| = e^{c_1} \Rightarrow (3u^2+1)x^3 = \pm e^{c_1} = c \Rightarrow 3y^2x + x^3 = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{c-x^3}{3x} \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{\frac{c-x^3}{3x}}$$

Για $y=1$ και $x=1$ $\quad 1 = \frac{c-1}{3} \Rightarrow c=4$

Άρα $y(x) = \sqrt{\frac{4-x^3}{3x}}$ η ειδική λύση, $x \in (0, 2^{2/3})$

10) $\left\{x e^{y/x} - y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}dx + x\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$

Διαιρούμε με x $(x \neq 0)$: $\left\{e^{y/x} - \frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}dx + \sin\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$

Η Δ.Ε είναι ομογενής. Θέτουμε $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow$

$dy = xdu + udx$

Άρα η Δ.Ε γράφεται $\{e^{u} - u\sin(u)\}dx + \sin(u)(xdu + udx) = 0$

$\Rightarrow \left(e^{u} - u\cancel{\sin u} + u\cancel{\sin u}\right)dx + x\sin u\,du = 0 \Rightarrow$

$e^{-u}\sin u\,du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int e^{-u}\sin u\,du = -\ln|x| + c_1$

• $\int e^{-u}\sin u\,du = -\int e^{-u}(\cos u)'du = -e^{-u}\cos u - \int e^{-u}\cos u\,du =$

$= -e^{-u}\cos u - \int e^{-u}(\sin u)'du = -e^{-u}\cos u - e^{-u}\sin u - \int e^{-u}\sin u\,du$

Άρα $2\int e^{-u}\sin u\,du = -e^{-u}(\cos u + \sin u)$

$\int e^{-u}\sin u\,du = -\frac{e^{-u}}{2}(\cos u + \sin u) = -\ln|x| + c_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-u}(\cos u + \sin u) = 2\ln|x| + 2c_1 \Rightarrow$ για $2c_1 = c$

$\Rightarrow \boxed{e^{-y/x}\left(\cos\frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}\right) = \ln x^2 + c}$, c αυθ. σταθ.

είναι η πλήρης λύση της Δ.Ε

11) α) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y}$ (1)

Η Δ.Ε είναι ομογενής. Θέτουμε $y=ux \Rightarrow y'=u'x+u$. Άρα

$$y' = \frac{x+3y}{x-y} \Rightarrow u'x+u = \frac{1+3u}{1-u} \Rightarrow u'x = \frac{1+3u}{1-u} - u = \frac{1+3u-u+u^2}{1-u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2+2u+1}{1-u} \Rightarrow \frac{(1-u)\,du}{(u+1)^2} = \frac{dx}{x} \quad \text{για } u\neq -1$$

$$\Rightarrow \frac{(u-1)\,du}{(u+1)^2} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{u+1-2}{(u+1)^2}\right)du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|u+1| + \frac{2}{(u+1)} = -\ln|x| + c_1 \Rightarrow \ln|u+1| + \ln|x| = c_1 - \frac{2}{u+1}$$

$$\Rightarrow \ln|x(u+1)| = c_1 - \frac{2}{u+1} \Rightarrow \ln|y+x| = c_1 - \frac{2x}{y+x}$$

$$\Rightarrow |y+x| = e^{c_1}e^{-\frac{2x}{y+x}} \Rightarrow (y+x) = ce^{-\frac{2x}{y+x}} \qquad c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Η $u=-1 \Rightarrow y=-x$ είναι λύση της Δ.Ε., η οποία θα μπορούσε να προκύψει από τη γενική (ολοκλ.) λύση αν θέσουμε $c=0$.
Άρα το πλήρες (ολοκλ.) λύση είναι:

$$\boxed{y(x)+x = ce^{-\frac{2x}{y+x}}, \quad c\in\mathbb{R}}$$

β) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y+5}{x-y+1}$ (2)

Θεωρούμε το αλγεβρικό σύστημα $\left.\begin{aligned} x+3y+5&=0 \\ x-y+1&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix}-5 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}} = \frac{8}{-4} = -2$

$y = \frac{\begin{vmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}} = \frac{4}{-4} = -1$, Άρα η λύση του συστήματος είναι $(-2,-1)$

Θέτουμε $X = x+2$ και $Y=y+1$

Από το σύστημα (2) έχουμε: $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = \frac{X+3Y}{X-Y}$ του οποίου

το πλήρες ολοκλήρωμα από το (α) είναι: $Y+X = ce^{-\frac{2X}{Y+X}}$

άρα $y+1+x+2 = ce^{-\frac{2(x+2)}{y+x+3}} \Rightarrow \boxed{y+x+3 = ce^{-\frac{2(x+2)}{y+x+3}}, \quad c\in\mathbb{R}}$

12) $(1-x^2)(1-y)\,dx = xy(1+y)\,dy$

Για $y \neq 1$ και $x \neq 0$

$$\frac{y(1+y)\,dy}{1-y} = \frac{(1-x^2)\,dx}{x} \Rightarrow \frac{y(1+y)\,dy}{y-1} = \frac{(x^2-1)\,dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y(y-1+2)}{(y-1)}\,dy = x\,dx - \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{y(y-1)}{(y-1)}\,dy + \frac{2y}{(y-1)}\,dy = x\,dx - \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow y\,dy + \left(\frac{2(y-1)+2}{(y-1)}\right)dy = x\,dx - \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\,dy + 2dy + \frac{2\,dy}{y-1} = x\,dx - \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{y^2}{2} + 2y + 2\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + C_1$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y + \ln(y-1)^4 = x^2 - \ln x^2 + C \qquad (2C_1 = C),\ C \in \mathbb{R}.$$

Η $y(x)=1$ είναι λύση της Δ.Ε. και $x(y)=0$ είναι λύση της Δ.Ε.

Άρα το πλήρες ολοκλήρωμα είναι:

και $\begin{cases} y^2+4y+\ln(y-1)^4 = x^2 - \ln x^2 + C, & C \in \mathbb{R}\ \ y \neq 1,\ x \neq 0 \ -\ \text{γενικό ολοκλ.} \\ y(x) = 1 \\ x(y) = 0 \end{cases}$