ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ, Ε.Μ.Π. - 21/01/2020
"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ"
ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ =10, ΒΑΣΗ=5, ΔΙΑΡΚΕΙΑ= 3 h

Οι φοιτητές που χρωστούν και τα δύο αντικείμενα, πρέπει να συγκεντρώσουν **ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 2** μονάδες από **ΚΑΘΕ** μέρος.

ΜΕΡΟΣ Α: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ 1. **(α)(1μ.)** Να δείξετε ότι η ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ $n \geq 1$, συγκλίνει και να υπολογίσετε το $\lim_n a_n$.

(β)(0,8μ.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$.

(γ) (0,7μ.) Να αναπτύξετε τη συνάρτηση $f(x) = xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ σε δυναμοσειρά γύρω από το 0 και να υπολογίσετε την παράγωγο $f^{(7)}(0)$.

ΘΕΜΑ 2.(α) (1μ.) Με χρήση του θεωρήματος Taylor, να δείξετε ότι

$$\left|\cos(x^2) - \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!}\right)\right| \leq \frac{x^{12}}{6!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(β)(0,7μ.) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}\,dx$.

(γ)(0,8μ.) Να δείξετε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}}dt$ συγκλίνει.

ΜΕΡΟΣ Β: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 3. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

(α) (0,5μ.) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και τις ιδιοτιμές του.
(β)(0,5μ.) Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων που βρήκατε στο (α), μπορείτε να αποφασίσετε αν ο A διαγωνοποιείται και αν αντιστρέφεται; (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.)
(γ)(1,5μ.) Αν ο A διαγωνοποιείται, να βρείτε μία διαγωνοποίηση του A. Αν ο A αντιστρέφεται, να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του A^{-1} χωρίς να υπολογίσετε το αντίστροφο του A.

ΘΕΜΑ 4.(α) (i) (0,5 μ.) Δίνεται πίνακας A τύπου 4×4 με $\det(A)$=7. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες $\det(-A)$, $\det(2 \cdot A^t \cdot A^{-1})$, όπου A^t ο ανάστροφος του A.
(ii) (0,5μ.) Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές του $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ 2x + my - 4z = m \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

(β) (1,5μ.) Δίνονται οι ευθείες

$$(\varepsilon_1) : \frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{1}, \qquad (\varepsilon_2) : \frac{x-5}{-6} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+1}{-2}.$$

Να δείξετε ότι οι (ε_1), (ε_2) είναι παράλληλες και να βρείτε την απόστασή τους.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (ΜΕΡΟΣ Α)

Θ.1. (α) $a_1=1$, $a_2=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}>1=a_1$

Ισχυρισμός 1: $a_n<a_{n+1}$, $\forall n\geq 1$.

- Για $n=1$, ισχύει.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n\geq 1$, δηλ. $a_n<a_{n+1}$.

Τότε, $1+a_n<1+a_{n+1}$

$\Rightarrow \sqrt{1+a_n}<\sqrt{1+a_{n+1}}$

$\Rightarrow a_{n+1}<a_{n+2}$,

δηλ. ισχύει κ' για $n+1$.

$a_1=1<2$, $a_2=\sqrt{2}<2$

Ισχυρισμός 2: $a_n<2$, $\forall n\geq 1$.

- Για $n=1$, ισχύει.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n\geq 1$, δηλ. $a_n<2$.

Τότε, $1+a_n<3 \Rightarrow \sqrt{1+a_n}<\sqrt{3}<2$

$\Rightarrow a_{n+1}<2$, δηλ. ισχύει και για $n+1$.

Επειδή $(a_n)\uparrow$ κ' φραγμένη άνω, η (a_n) συγκλίνει. Εάν $L=\lim a_n$, από την αναδρομική σχέση παίρνουμε

$$L=\sqrt{1+L} \Rightarrow \begin{cases} L^2-L-1=0 \\ L\geq 0 \end{cases} \Rightarrow L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(β) Θέτουμε $a_n = n!\left(\frac{2}{n}\right)^n = n!\,\frac{2^n}{n^n}$, $n \geq 1$.

Τότε, $a_{n+1} = \cancel{n!(n+1)}\cdot\frac{2^n\cdot 2}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}}$

$$= 2\,\frac{n!\cdot 2^n}{n^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = 2a_n\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} 2/e < 1$$

$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, από το κριτήριο του λόγου.

(γ) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = x e^{-x^2} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$$

$$\frac{f^{(7)}(0)}{7!} = \text{συντελεστής } (x^7) = \frac{(-1)^3}{3!} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad f^{(7)}(0) = -\frac{7!}{3!} = -4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$$

$$= -840.$$

③

~~Θ~~.2 (a) Θέτω $f(x)=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$.
$\forall x\in\mathbb{R}$, από Θ. Taylor, $\exists\, \xi_x$ μεταξύ 0, x ώστε

$$f(x) = T_{5,f,0}(x) + \underbrace{\frac{f^{(6)}(\xi_x)}{6!}x^6}_{R_{5,f,0}(x)}$$

κ' $T_{5,f,0}(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$,

$$|R_{5,f,0}(x)| \le \frac{x^6}{6!}$$

(σημ. $f^{(5)}(0)=0$ κ' $|f^{(6)}(\xi_x)| \le 1$).

Θέτοντας στα παραπάνω όπου "x" το x^2 παίρνουμε

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + R_{5,f,0}(x^2)$$

$$\Rightarrow \left|\cos(x^2) - \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!}\right)\right| =$$

$$= |R_{5,f,0}(x^2)| \le \frac{x^{12}}{6!}, \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

(β) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{x+1}{(x+2)^2+2^2}\,dx$ (4)

$$\overset{x+2=2y}{=} \int \frac{2y-1}{4(1+y^2)}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy - \frac{1}{4}\int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln(1+y^2) - \frac{1}{4}\,\mathrm{Arctan}\,y + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{(x+2)^2}{4}\right) - \frac{1}{4}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+2}{2}\right) + c$$

(γ) Επιλέγω $r \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$, π.χ. $r = \frac{5}{4}$. Τότε, $\forall\, t \geq 1$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{\ln t}{t^{3/2}}}{\frac{1}{t^r}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2-r}} \overset{\text{L'Hospital}}{=}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1/t}{\left(\frac{3}{2}-r\right)t^{1/2-r}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}-r\right)t^{3/2-r}}$$

$= 0$ (σημ. ότι $r < 3/2$!)

Αλλά, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^r}$ συγκλίνει, αφού $r>1$. Από το κριτήριο οριακής σύγκρισης, το $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}}\,dt$ συγκλίνει.

5