Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

9ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Ερωτήσεις Κατανόησης)**.** Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις με αιτιολόγηση.

(i) Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά και το I είναι ανοικτό διάστημα τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Σωστό ή Λάθος;

(ii) Οι δυναμοσειρές $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ και $\displaystyle\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνουν ακριβώς για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$. Σωστό ή Λάθος;

(iii) Αν δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης θα συγκλίνουν απαραίτητα για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$;

(iv) Δίνεται μια δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in (3, 8)$ και αποκλίνει για $x = 8$. Ποιο είναι το κέντρο της δυναμοσειράς και ποια η ακτίνα σύγκλισής της;

Λύση.

(i) Είναι **Σωστό** γιατί από το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών η παράγωγος μιας δυναμοσειράς σε ένα ανοικτό διάστημα I είναι επίσης δυναμοσειρά στο I και επομένως παραγωγίζεται ξανά.

(ii) Είναι **Σωστό** γιατί τα μερικά αθροίσματα των δύο δυναμοσειρών διαφέρουν κατά ένα πεπερασμένο πλήθος όρων, συγκεκριμένα διαφέρουν κατά $\displaystyle\sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό s_x τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό $s_x - \displaystyle\sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$. Ισχύει και το αντίστροφο: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό t_x τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό $t_x + \displaystyle\sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$.

Επομένως οι δύο δυναμοσειρές συγκλίνουν για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Όχι απαραίτητα. Ας πάρουμε τις δυναμοσειρές $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ και $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$. Η πρώτη συγκλίνει ακριβώς για κάθε $x \in (-1, 1)$ ενώ η δεύτερη ακριβώς για κάθε $x \in [-1, 1)$. Άρα οι δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης $r = 1$ αλλά για $x = -1$ η μία συγκλίνει ενώ η άλλη όχι.

(iv) Το κέντρο της δυναμοσειράς είναι ο αριθμός $\dfrac{3+8}{2} = \dfrac{11}{2}$ και η ακτίνα σύγκλισης ο αριθμός $r = \dfrac{8-3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Εξήγηση: μια δυναμοσειρά είτε (α) θα συγκλίνει ακριβώς για ένα x (το κέντρο της δυναμοσειράς), είτε (β) θα συγκλίνει για τα x σε ένα διάστημα της μορφής $(c-r, c+r)$ και θα αποκλίνει για τα $x \notin [c-r, c+r]$ ενώ για τα $x = c-r, c+r$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει, είτε (γ) θα συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Από τα δεδομένα μας δεν βρισκόμαστε στις περιπτώσεις (α) και (γ). Επομένως είμαστε στη (β). Τότε το κέντρο της δυναμοσειράς είναι το μέσο του μεγαλύτερου διαστήματος I στο εσωτερικό του οποίου έχουμε σύγκλιση ενώ η ακτίνα σύγκλισης είναι το μισό του μήκους του. Από τα δεδομένα μας το προηγούμενο I είναι το $(3,8)$.

Άσκηση 2 (Αναγνώριση δυναμοσειράς)**.** Βρείτε το κέντρο c και τους συντελεστές $a_n, n \in \mathbb{N}$ στις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n.$$

Λύση.
Στην πρώτη δυναμοσειρά έχουμε $a_n = 3^n, n \in \mathbb{N}$ και $c = 0$.

Στη δεύτερη: $a_n = \dfrac{1}{n!}$ και $c = 1$.

Σχετικά με την τρίτη δυναμοσειρά πρέπει να φέρουμε τους όρους μέσα στο άθροισμα στη μορφή $a_n \cdot (x-c)^n$. Υπολογίζουμε

$$2^{-n} \cdot (7x-1)^n = 2^{-n} \cdot 7^n \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right)^n = \frac{7^n}{2^n} \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right)^n.$$

Άρα $a_n = \dfrac{7^n}{2^n}, n \in \mathbb{N}$ και $c = \dfrac{1}{7}$.

Τέλος στην τέταρτη δυναμοσειρά υπολογίζουμε

$$\frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n = \frac{1}{n+1} \cdot 5^n \cdot \left(x + \frac{3}{5}\right)^n = \frac{5^n}{n+1} \cdot (x - (-3/5))^n.$$

Άρα $a_n = \dfrac{5^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$ και $c = -\dfrac{3}{5}$.

Άσκηση 3 (Εύρεση διαστήματος σύγκλισης)**.**

(i) Για κάθε δυναμοσειρά της Άσκησης 2 βρείτε το σύνολων όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

(ii) Επαναλάβετε το ίδιο για τις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$$

Λύση.

(i) Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου. Σχετικά με την πρώτη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$ θεωρούμε $x \neq 0$.

Τότε έχουμε

$$\left| \frac{3^{n+1} \cdot x^{n+1}}{3^n \cdot x^n} \right| = 3 \cdot |x|$$

Αν $3 \cdot |x| < 1$, ισοδύναμα $|x| < 1/3$ ή αλλιώς $x \in (-1/3, 1/3)$ τότε η σειρά συγκλίνει. Αν $3 \cdot |x| > 1$, ισοδύναμα $x \notin [-1/3, 1/3]$ η σειρά αποκλίνει. Αν $x = 1/3$ τότε $3^n \cdot x^n = 1 \not\to 0$ άρα η σειρά αποκλίνει. Αν $x = -1/3$ τότε $3^n \cdot x^n = (-1)^n \not\to 0$ άρα η σειρά αποκλίνει επίσης.

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1/3, 1/3)$.

(Πιο πάνω υποθέσαμε ότι $x \neq 0 =$ το κέντρο της δυναμοσειράς αλλά όπως έχουμε πει η δυναμοσειρά συγκλίνει πάντα για $x =$ κέντρο.)

Περνάμε στη δεύτερη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \cdot (x-1)^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ έχουμε

$$\left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(x-1)^n} \right| = \frac{1}{n+1} \cdot |x-1| \longrightarrow 0 < 1.$$

Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προχωράμε στην τρίτη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $7x-1 \neq 0$, ισοδύναμα $x \neq 1/7$ (που είναι το κέντρο της δυναμοσειράς) έχουμε

$$\left| \frac{2^{-(n+1)} \cdot (7x-1)^{n+1}}{2^{-n} \cdot (7x-1)^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot |7x-1|.$$

Προφανώς

$$\frac{1}{2} \cdot |7x-1| < 1 \iff |7x-1| < 2 \iff 7x \in (1-2, 1+2) \iff 7x \in (-1,3) \iff x \in (-1/7, 3/7).$$

Άρα για $x \in (1/7, 3/7)$ η σειρά συγκλίνει ενώ για τα x με $\frac{1}{2} \cdot |7x-1| > 1$, ισοδύναμα $x \notin [-1/7, 3/7]$ η σειρά αποκλίνει. Εξετάζουμε τις άλλες δύο περιπτώσεις.

Για $x = 3/7$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (3-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

και άρα η σειρά αποκλίνει.

Για $x = -1/7$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

που επίσης αποκλίνει. Ένας τρόπος για να το δούμε αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι $(-1)^n \not\to 0$.

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1/7, 3/7)$.

Σχόλιο: Για να εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Λόγου δεν χρειάζεται να φέρουμε τη δυναμοσειρά στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Δηλαδή δεν απαιτείται να έχουμε λύσει πρώτα την Άσκηση 2. Βοηθάει όμως να αναγνωρίσουμε το κέντρο της δυναμοσειράς.

Τέλος θεωρούμε την τέταρτη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n$. Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq -3/5$ (το κέντρο της δυναμοσειράς). Τότε

$$\left| \frac{(5x+3)^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{(5x+3)^n} \right| = \frac{n+1}{n+2} \cdot |5x+3| \longrightarrow 1 \cdot |5x+3| = |5x+3|.$$

Υπολογίζουμε

$$|5x+3| < 1 \iff 5x \in (-3-1, -3+1) \iff 5x \in (-4,-2) \iff x \in (-4/5, -2/5).$$

Οπότε για $x \in (-4/5, -2/5)$ η σειρά συγκλίνει ενώ για $x \notin [-4/5, -2/5]$ αποκλίνει. Για $x = -2/5$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

που αποκλίνει (αρμονική σειρά). Ενώ για $x = -4/5$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

που συγκλίνει από το Κριτήριο Leibniz. Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in [-4/5, -2/5)$.

(ii) Στην πρώτη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{\sqrt{n+1} \cdot x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n} \cdot x^n} \right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| \longrightarrow \sqrt{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| = \frac{1}{2} \cdot |x|.$$

Έχουμε $1/2 \cdot |x| < 1 \iff |x| < 2 \iff x \in (-2, 2)$. Επομένως η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (-2, 2)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [-2, 2]$. Για $x = 2$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$$

και η σειρά αποκλίνει γιατί $\sqrt{n} \to \infty$. Για $x = -2$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{n}$$

που πάλι αποκλίνει γιατί $(-1)^n \cdot \sqrt{n} \not\to 0$. (Αν συνέκλινε στο 0 τότε και η απόλυτη τιμή της ακολουθίας θα συνέκλινε στο 0 που είναι άτοπο.)

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-2, 2)$.

Περνάμε στην επόμενη δυναμοσειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow |x| \cdot \frac{e}{e} = |x|$$

Οπότε για $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει ενώ για $|x| > 1$ αποκλίνει. Για $|x| = 1$ έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |x|^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \neq 0.$$

Ειδικότερα η ακολουθία που βρίσκεται μέσα στη σειρά δεν συγκλίνει στο 0 και επομένως η σειρά αποκλίνει. Καταλήγουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1, 1)$.

Στην επόμενη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$,

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{n^n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot (n+1) \geq |x| \cdot (n+1) \longrightarrow \infty.$$

Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = 0$.

Τέλος θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$. Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε

$$\left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+5}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+5}}{x^n} \right| = |x| \cdot \sqrt{\frac{n^2+5}{(n+1)^2+5}} = |x| \cdot \sqrt{\frac{n^2+5}{n^2+2n+6}} \longrightarrow |x| \cdot \sqrt{1} = |x|.$$

Επομένως αν $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει και αν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Για $x = 1$ έχουμε

$$\frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}.$$

Εφαρμόζουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+5}}$ και $b_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+5}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2+5}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2+5}} \longrightarrow 1 > 0.$$

Επομένως είμαστε στην πρώτη περίπτωση του κριτηρίου, που λέει ότι είτε και οι δύο σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν. Η $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ όμως αποκλίνει (αρμονική σειρά) επομένως και η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Για $x = -1$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+5}}\,.$$

Η ακολουθία $(\sqrt{n^2+5})_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως αύξουσα και επομένως η ακολουθία $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως από το Κριτήριο του Leibniz η πιο πάνω σειρά συγκλίνει. (Δεν κάνει διαφορά που τα αθροίσματα ξεκινάνε από το 0.) Καταλήγουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in [-1, 1)$.

Άσκηση 4 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά)**.** Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε μορφή δυναμοσειράς σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα I:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \quad x \neq -1, \qquad f_2(x) = \frac{1}{3-x} \quad x \neq 3,$$
$$f_3(x) = x \cdot \sin(x^2) \quad x \in \mathbb{R},$$
$$g_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad x \in \mathbb{R}, \qquad g_2(x) = \cos(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Στην τελευταία να γίνει χρήση της δυναμοσειράς του $\sin(x)$.

Υποδείξεις. Στις f_1 και f_2 χρησιμοποιείστε ότι $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$. Στην g_1 χρησιμοποιείστε ότι $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)' = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ και το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών.

Λύση.

Σχετικά με την f_1 η ιδέα είναι να πάρουμε τη δυναμοσειρά της συνάρτησης $x \mapsto 1/(1-x)$ και να αντικαστατήσουμε το x με το $-x$. Για $x \in (-1, 1)$ έχουμε επίσης $-x \in (-1, 1)$, επομένως

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n.$$

Άρα $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$ για $x \in (-1, 1)$.

Σχετικά με την f_2 παρατηρούμε

$$f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}}.$$

Αν έχουμε $|x/3| < 1$, ισοδύναμα $|x| < 3$ τότε $\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$. Καταλήγουμε

$$f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot x^n \quad x \in (-3, 3).$$

Σχετικά με τη συνάρτηση f_3 παίρνουμε τον τύπο για το ημίτονο και αντικαθιστούμε το x με το x^2. Έπειτα πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το x,

$$\begin{aligned} f_3(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (x^2)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{4n+3} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Σχετικά με την g_1 έχουμε

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad x \neq -1.$$

Επομένως

$$g_1(x) = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' \quad x \neq -1.$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 4 έχουμε $1/(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1) \cdot x^n$ για $|x| < 1$. Από το Θέωρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών

$$g_1(x) = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Τέλος σχετικά με τη συνάρτηση g_2 χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα του $\sin(x)$ και το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών. Αφού η συνάρτηση ημίτονο αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά σε όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει το ίδιο και για τη συνάρτηση συνημίτονο.

Άρα

$$\begin{aligned} \cos(x) = (\sin(x))' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}\right)' \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} - \dots\right)' \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Δείξτε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n, \quad |x| < 1.$$

Υπόδειξη. Ισχύει $\ln(1+x) + c = \int \frac{1}{1+x}\, dx$. Αναπτύξτε το $\frac{1}{1+x}$ σε δυναμοσειρά και υπολογίστε τη σταθερά c.

Λύση.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < 1$ έχουμε

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n.$$

Από το Θεώρημα Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών προκύπτει για κάθε $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}\ln(1+x) + c &= \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\int (-1)^n \cdot x^n dx\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\end{aligned}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$. Για να υπολογίσουμε το c παίρνουμε $x = 0$ και έχουμε

$$\ln(1+0) + c = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{0^{n+1}}{n+1}\right)$$

ισοδύναμα $0 + c = 0$, επομένως $c = 0$. Άρα για κάθε $|x| < 1$ ισχύει

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε αντικαταστήσει το n με το $n-1$.