



7ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Άλγεβρα Σειρών).

- (i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ συγκλίνει αλλά οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν.
- (ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει επίσης.
- (iii) Δείξτε ότι αν $c \neq 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Λύση.

(i) Θέτουμε $a_n = 1$ και $b_n = -1$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε $a_n + b_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Αν θέσουμε $s_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$ τότε $s_n = 0 + \dots + 0$ (n φορές) και συνεπώς $s_n = 0$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$.

Από την άλλη είναι σαφές ότι $a_n \not\rightarrow 0$ και $b_n \not\rightarrow 0$, συνεπώς οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν.

Προσοχή: Μη θεωρήσετε ότι η παραπάνω σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ μας οδηγεί σε “απροσδιοριστία του τύπου $0 \cdot \infty$ ”. Εδώ δεν υπάρχει καμία απροσδιοριστία: το άπειρο άθροισμα είναι σαφώς ορισμένο ως το όριο της ακολουθίας των πεπερασμένων αθροισμάτων. Αν κάθε πεπερασμένο άθροισμα είναι 0 τότε το όριο της σειράς είναι και αυτό 0.

(ii) Παρατηρούμε ότι $b_n = a_n + b_n + (-1) \cdot a_n$ για κάθε $n \geq 1$. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \cdot a_n$. Επιπλέον αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ συγκλίνει, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n + b_n + (-1) \cdot a_n] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

συγκλίνει επίσης. (Άθροισμα συγκλιουσών σειρών.)

(iii) Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ συγκλίνει τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c^{-1} \cdot (c \cdot a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Άσκηση 2 (Διερεύνηση Σύγκλισης). Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \text{όπου } |x| \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}].$$

Λύση.

Αν $|x| \geq 1$ τότε $|x^n| = |x|^n \geq 1$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως $x^n \not\rightarrow 0$ και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ αποκλίνει.

(Μπορεί ναδειχθεί σχετικά εύκολα ότι $|x^n| \rightarrow +\infty$ όταν $|x| > 1$.)

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$ συνέκλιε τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-1} \cdot \frac{5}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ θα συνέκλιε επίσης που είναι άτοπο.

Σχετικά με την τρίτη σειρά θέτουμε $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$ και $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Αν ο n είναι άρτιος τότε $a_n = 1 + (-1) = 0$ και αν ο n είναι περιττός αριθμός τότε $a_n = -1 + 1 = 0$. Επομένως $a_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και $s_n = a_1 + \dots + a_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Άρα $s_n \rightarrow 0$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ και ειδικότερα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 3. Δίνονται $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ και $n \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

και

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να αποδειχθεί η πρώτη ισότητα είναι με επαγωγή. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε: $(1-x) \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \sum_{k=1}^n x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \dots$

Λύση.

Σύμφωνα με την υπόδειξη έχουμε

$$\begin{aligned} (1-x) \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} &= \sum_{k=1}^n x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n x^{k-1} - \sum_{k=1}^n x^k \\ &= x^0 + x^1 + \dots + x^{n-1} \\ &\quad - (x^1 + \dots + x^{n-1} + x^n) \\ &= x^0 - x^n \\ &= 1 - x^n. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$(1-x) \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = 1 - x^n$$

και διαιρώντας με το $1-x$,

$$\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα έχουμε

$$\sum_{k=1}^n x^k = x \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = x \cdot \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Άσκηση 4 (Εύρεση ορίου σειράς). Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}}.$$

Λύση.

Στις πρώτες δύο σειρές χρησιμοποιούμε τον τύπο $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ καθώς και τις ιδιότητες των συγκλινουσών σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n = -\frac{8}{125} \cdot \frac{-\frac{2}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{8}{125} \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{875}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} - \frac{4^2}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{16}{5} \cdot \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} - \frac{16}{5} \cdot 4 \\ &= \frac{9}{10} - \frac{64}{5} \\ &= \frac{9 - 128}{10} = -\frac{119}{10}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5 (Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2 + 1)}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}.$$

Υπόδειξη: Υπειθυμίζουμε την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Λύση.

Σχετικά με την πρώτη σειρά έχουμε

$$\left| \frac{(-1)^n \sin(n^2 + 1)}{2^n} \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2 + 1)}{2^n}$ συγκλίνει απολύτως και άρα και κανονικά.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$, έχουμε

$$\frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Στην τρίτη σειρά παρατηρούμε ότι $3n-2 < 3n$ και επομένως $\frac{1}{3n-2} > \frac{1}{3n}$ για κάθε $n \geq 1$. Αν συνέκλιε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ τότε από το Κριτήριο Σύγκρισης θα συνέκλιε και σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$. Επομένως θα συνέκλιε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι άτοπο.

Άσκηση 6 (Κριτήριο Λόγου). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}.$$

Λύση.

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^4} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^4 \cdot \frac{1}{3} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ συγκλίνει. (Για την ακρίβεια συγκλίνει απολύτως αλλά μια και η ακολουθία αποτελείται από θετικούς όρους δεν κάνει διαφορά τι από τα δύο θα πούμε.)

Στη δεύτερη

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ συγκλίνει.

Σχετικά με την τρίτη σειρά

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{5^n \cdot n!} \\ &= \frac{5^{n+1}}{5^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 5 \cdot (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1) \cdot (n+1)^n} \\ &= 5 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= 5 \cdot \frac{1}{(1+1/n)^n} \rightarrow \frac{5}{e} > 1. \end{aligned}$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$ αποκλίνει.