



## 2ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:  
Β. Γρηγοριάδης  
Κ. Παυλοπούλου  
Γ. Μαιουσακής

**Συμβολισμός.** Για κάθε  $n = 1, 2, \dots$  συμβολίζουμε με  $f^{(n)}$  τη  $n$ -στη παράγωγο της  $f$ . Με  $f^{(0)}$  εννοούμε την  $f$ . Επομένως  $f^{(0)} = f$ ,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$  κ.τ.λ.

**Άσκηση 1** (Χρήση του συμβολισμού  $\Sigma$ ). Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$17 \cdot \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots}$$

$$\left( \sum_{k=1}^n x^k \right) + x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\dots} \dots\dots\dots$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \dots\dots\dots \quad \text{όπου } a, b \neq 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}^*.$$

**Άσκηση 2** (Εκθετική Συνάρτηση - Παράγωγοι στο  $x_0 = 0$ ). Δίνεται η εκθετική συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = e^x$ . Δείξτε ότι  $f^{(n)}(0) = 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 3** (Παράγωγοι Συνάρτησης Λογαρίθμου στο  $x_0 = 1$ ). Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} :$

$$g(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f(x) = \ln(1+x).$$

Δείξτε ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}, \quad x \in (-1, 1),$$

καθώς και ότι

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

για κάθε  $k \geq 1$ .

---

**Άσκηση 4** (Παράγωγοι ημιτόνου κάθε τάξης). Δείξτε ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε

$$(1) \quad \sin^{(4n)}(x) = \sin(x), \quad \sin^{(4n+1)}(x) = \cos(x), \quad \sin^{(4n+2)}(x) = -\sin(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = -\cos(x),$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $f^{(m)}(x)$  είναι η παράγωγος της  $f$  τάξης  $m \in \mathbb{N}$ . (Με  $f^{(0)}$  εννοούμε την  $f$ .) Συμπεράνετε ότι

$$(2) \quad \sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j + 1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Άσκηση 5** (Παράγωγοι συνημιτόνου κάθε τάξης). Διατυπώστε και αποδείξτε τις αντίστοιχες με την Άσκηση 4 ισότητες για τη συνάρτηση του συνημιτόνου  $\cos$ .