Ολοκληρώματα

(Περιλαμβάνει Σχολική Ύλη)

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης
Το εμβαδόν ως όριο

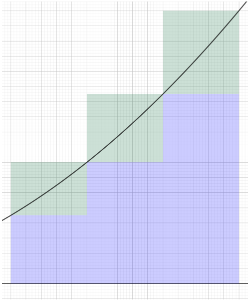
Διευκρίνιση Εκτός αν λέμε διαφορετικά με τον όρο "ολοκλήρωμα" εννοούμε "ορισμένο ολοκλήρωμα".

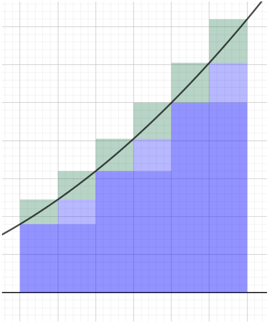
Κίνητρο. Εύρεση εμβαδών και όγκων (Εύδοξος - Αρχιμήδης).

Μοντέρνα διατύπωση. Εύρεση εμβαδού ανάμεσα στη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ και του άξονα $x'x$.

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Διαιρούμε το $[a,b]$ σε n-το πλήθος ίσα και διαδοχικά υποδιαστήματα και παίρνουμε τα ορθογώνια που σχηματίζονται από αυτά τα διαστήματα και τη γραφική παράσταση της f.

Σχήματα: Επιτυγχάνουμε μια προσέγγιση του εμβαδού από κάτω (μπλε ορθογώνια) και από πάνω (μπλε και πράσινα ορθογώνια).





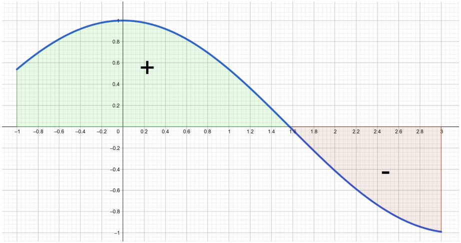
Όσο πιο μεγάλο το n
τόσο καλύτερη η προσέγγιση

Τα μπλε εμβαδά όπως επίσης μαζί με τα πράσινα «πλησιάζουν» κάποιον πραγματικό αριθμό, ο οποίος εκφράζει την έννοια του εμβαδού ανάμεσα στη γραφική παράσταση της f και του άξονα $x'x$.

Ο αριθμός που «πλησιάζουν» ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)dx$. Δηλαδή

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \text{ο αριθμός που πλησιάζουν τα μπλε εμβαδά} \\ &= \text{ο αριθμός που πλησιάζουν τα μπλε+πράσινα εμβαδά} \\ &\qquad \text{(στο προηγούμενο σχήμα)}\end{aligned}$$

Όταν η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ προσμετράμε το εμβαδόν αρνητικά.



Η έννοια του ολοκληρώματος επεκτείνεται και σε μια μεγάλη κατηγορία μη συνεχών συναρτήσεων, αλλά εμείς θα περιοριστούμε στις συνεχείς.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f\colon [a,a] \to \mathbb{R}$ τότε *ορίζουμε* το ολοκλήρωμά της να είναι *μηδέν*, δηλαδή

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Χρήσιμος *συμβολισμός*: αν $a < b$ με $\int_b^a f(x)dx$ εννοούμε τον *αντίθετο* αριθμό του ολοκληρώματος, δηλαδή

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

(Το $\int_b^a f(x)dx$ παύει να έχει το νόημα εμβαδού.)

Αν η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα σύνολο που περιέχει το κλειστό διάστημα $[a,b]$ με $\int_a^b f(x)dx$ εννοούμε το ολοκλήρωμα του *περιορισμού της f* στο $[a,b]$.

Π.χ. αν $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορούμε πάλι να πάρουμε το $\int_0^1 f(x)dx$.

Ιδιότητες Ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\min(f\,|[a,b]) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max(f\,|[a,b]) \cdot (b-a)$$

$$f \leq g \text{ στο } [a,b] \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

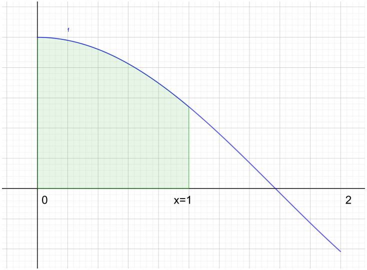
Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Θεωρούμε ότι έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Παρατηρούμε ότι $F(a) = 0$ και $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Παράδειγμα: δίνεται η πιο κάτω $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, η τιμή $F(1)$ είναι το εμβαδόν της πράσινης περιοχής



Θεώρημα: (Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού - Fundamental Theorem of Calculus)

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *και την* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *με* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. *Τότε η* F *είναι συνεχής, διαφορίσιμη και*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Πόρισμα. Δίνονται δύο συναρτήσεις $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ με την f συνεχή και την F παραγωγίσιμη. Αν $F' = f$ τότε

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Με άλλα λόγια αν μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση F με $F' = f$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το $\int_a^b f(x)dx$.

Παρατηρήσεις. 1) Η διαφορά $F(b) - F(a)$ συμβολίζεται συνήθως με $F(x)\Big|_a^b$.

2) Ο τύπος $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ισχύει και για $b \leq a$. Αυτό προκύπτει εύκολα από τον κανονικό τύπο. Π.χ. για $b = 1$ και $a = 2$ έχουμε

$$\int_2^1 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx = -(F(2) - F(1)) = F(1) - F(2).$$

Απόδειξη του Πορίσματος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$. Τότε

$$F_0\,'(x) = f(x) = F\,'(x), \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Άρα $F_0\,' = F\,'$ ή αλλιώς $(F - F_0)' = 0$. Επομένως $F - F_0 = c \in \mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F_0(b) = F_0(b) - F_0(a)\\ &= F_0(b) + c - (F_0(a) + c) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^2 dx$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \frac{x^3}{3}$ για $x \in [0, 1]$ και παρατηρούμε ότι $F\,'(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Άρα

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Μια συνάρτηση $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι *παράγουσα* (anti-derivative) της $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ αν $F' = f$. Π.χ. η $F(x) = x^3$, $x \in [0,1]$ είναι παράγουσα της $f(x) = 3x^2$.

Η παράγουσα εφόσον υπάρχει δεν είναι μοναδική, για την ακρίβεια δύο παράγουσες της ίδιας συνάρτησης διαφέρουν κατά μία σταθερά.

Με τον όρο *αόριστο ολοκλήρωμα* μιας συνάρτησης f εννοούμε μια οποιαδήποτε παράγουσα της f. Συμβολίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f με $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Αιτιολόγηση συμβολισμού. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$.

(Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν το αόριστο ολοκλήρωμα ως το σύνολο όλων των παραγουσών.)

Αν $F' = f$ γράφουμε

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}.}$$

Αιτιολόγηση. Τα $\int f(x)dx$ και F είναι παράγουσες της συνάρτησης f επομένως διαφέρουν κατά μία σταθερά.

Η σταθερά c είναι ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός και ονομάζεται *σταθερά ολοκλήρωσης*.

Γενικά η σταθερά c παραμένει ως έχει χωρίς να την προσδιορίζουμε. Από την άλλη κάποια προβλήματα παρέχουν δεδομένα που μας επιτρέπουν τον προσδιορισμό της σταθεράς.

Στοιχειώδη αόριστα ολοκληρώματα

$$\int K dx = K \cdot x + c$$

$$\int x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ όπου } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \quad \text{ή} \quad \ln(-x) + c = \ln|x| + c$$

(ανάλογα με το αν το x είναι θετικό ή αρνητικό)

$$\int e^{x} dx = e^{x} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0)$$