$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$

α) Αν $\ell < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

β) Αν $\ell > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Επίσης αν $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ τότε πάλι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Για $\ell = 1$ δεν έχουμε συμπέρασμα.

Π.χ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ συγκλίνει

$$\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \right)$$

Π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$ άρα η σειρά συγκλίνει.

3) Κριτήριο ρίζας (Cauchy)

1) Αν $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

2) Αν $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell \in \mathbb{R}$ με $\ell > 1$

ή $\sqrt[n]{|a_n|} \to +\infty$ τότε η

σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

Π.χ. 1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$ συγκλίνει απολύτως.

Έχουμε $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} - 1 \to 1-1=0$

$0 < 1$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας.

2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ αποκλίνει.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1.$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας.

4) Κριτήριο Leibniz

Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φθίνουσα και $a_n \longrightarrow 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \cdot a_n\right)$ συγκλίνει.

Π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Έχουμε $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n = \frac{1}{n}$ είναι φθίνουσα

Από το κριτήριο του Leibniz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ δεν συγκλίνει απολύτως. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$

5) Κριτήριο οριακής σύγκρισης

Θεωρούμε $a_n, b_n > 0$ $n \in \mathbb{N}^*$.

A) Αν $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$ με $\ell > 0$

τότε είτε και οι δύο σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν, είτε και οι δύο αποκλίνουν.

B) Αν $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ και αν

η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η

σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Γ) Αν $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ και αν

η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει τότε και

η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Παραδείγματα

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n-1}{4n^4-2n^2+5}$$

Θέτουμε $a_n = \dfrac{n^2+5n-1}{4n^4-2n^2+5}$ και $b_n = \dfrac{n^2}{n^4} = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Τότε $$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2+5n-1}{4n^4-2n^2+5} \cdot n^2 = \frac{n^4+5n^3-n^2}{4n^4-2n^2+5} = \frac{1+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}{4-\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^4}}$$

$$\to \frac{1}{4} > 0$$

Άρα είμαστε στην Περίπτωση Α) του Κριτηρίου.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει άρα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}$

Θέτουμε $a_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ και $b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

$n = 1, 2 \ldots$.

Τότε $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+1}{n^2+2} \cdot n = \frac{n^2+n}{n^2+2}$

$= \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} \rightarrow 1 > 0$

Άρα είμαστε πάλι στην Περίπτωση A).

Η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 5}{2^n}$

α' τρόπος: $\frac{4^n}{2^n} - \frac{5}{2^n} \longrightarrow +\infty - 0 = +\infty$

Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ με $a_n = \frac{4^n - 5}{2^n}$ δεν

συγκλίνει στο 0, άρα η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

β' τρόπος: Με το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

$b_n = \frac{4^n}{2^n} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$

Τότε $\frac{a_n}{b_n} = \frac{4^n - 5}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}$

$= 1 - \frac{5}{4^n} \to 1 > 0$

Άρα είμαστε στην περίπτωση 4) του κριτηρίου.

Η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ αποκλίνει

άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

6) Ολοκληρωτικό Κριτήριο

Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $f: [m, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Τότε η σειρά $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_m^{+\infty} f(x)\,dx$ ορίζεται.

Υπενθύμιση:

$$\int_m^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_m^R f(x)\,dx$$

Παράδειγμα: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Θεωρούμε την $f : [2, +\infty) \to (0, +\infty)$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ έτσι που

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n).$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν ορίζεται $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$.

Για $R > 0$ έχουμε $\int_2^R f(x)\,dx$

$$= \int_2^R \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^R \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx$$

$$= \ln(\ln x)\Big|_2^R = \ln(\ln R) - \ln(\ln 2)$$

$\xrightarrow{R\to+\infty} +\infty$. Άρα δεν ορίζεται το $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ και άρα η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ αποκλίνει.

<u>Ακολουθίες ορισμένες αναδρομικά</u>

Μπορούμε να ορίσουμε μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με <u>αναδρομή</u> ως εξής:

Αρχικά ορίζουμε τον όρο a_1.

Έπειτα ορίζουμε τον όρο a_{n+1} με τη βοήθεια του a_n ή γενικότερα με τη βοήθεια των $a_1, \dots, a_n$.

Αναδρομή $\rightarrow$ επαγωγή για ορισμούς

Παράδειγμα:

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$

Μερικοί όροι:

$a_2 = 2 \cdot a_1 \quad (n=1)$

$= 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 = 3 a_2 \quad (n=2)$

$= 3 \cdot 2 = 6$

$a_4 = 4 \cdot a_3 \quad (n=3)$

$= 4 \cdot 6$

$= 24$

Ισχύει $a_n = n!$, $n = 1, 2, \ldots$

Αυτός είναι ο αυστηρός ορισμός του $n!$

Ο αναδρομικός ορισμός συνδέεται άρρηκτα με την επαγωγική απόδειξη.

Sos Sos Sos

Παράδειγμα:

(Θέμα Φεβρουάριος 2022)

Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = \frac{1}{2} \ , \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{5a_n - 1} \ .$$
$$n \geq 1$$

i) Δείξτε με επαγωγή ότι

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^* .$$

ii) Δείξτε ότι $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \uparrow$.

iii) Εξηγήστε γιατί η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ συγκλίνει και υπολογίστε το όριό της.

Λύση

i) $n = 1$ προφανώς $\frac{1}{2} \leq a_1 \leq 1$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ και δείχνουμε ότι $\frac{1}{2} \leq a_{n+1} \leq 1$.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{5a_n - 1} \underset{\text{Ε.Υ.}}{\geq} \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot\frac{1}{2} - 1}$$

$\frac{1}{2}\sqrt{5x-1}$ ↑

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3/2} > \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{5a_n - 1} \underset{\text{Ε.Υ.}}{\leq} \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 1 - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

ii) <u>α΄ τρόπος:</u>

Με επαγωγή δείχνουμε $a_n \leq a_{n+1}$.

$n=1$: $a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot\frac{1}{2} - 1}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3/2} > \frac{1}{2} = a_1$$

Θεωρούμε ότι $a_n \leq a_{n+1}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$ και δείχνουμε ότι

$a_{n+1} \leq a_{n+2}$.

$a_n \leq a_{n+1}$

$\Rightarrow$ $5a_n \leq 5a_{n+1}$

$$\Rightarrow \quad 5a_n - 1 \le 5a_{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{5a_n - 1} \le \sqrt{5a_{n+1} - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{5a_n - 1} \le \frac{1}{2}\sqrt{5a_{n+1} - 1}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} \le a_{n+2}$$

<u>β' τρόπος:</u> $\quad a_n \le a_{n+1}$

$$\Leftrightarrow \quad a_n \le \frac{1}{2}\sqrt{5a_n - 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a_n \le \sqrt{5a_n - 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a_n^2 \le 5a_n - 1 \qquad (a_n \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a_n^2 - 5a_n + 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p(a_n) \le 0$$

όπου $\quad p(x) = 4x^2 - 5x + 1$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

x		$1/4$		1	
$p(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Από το i) $\overbrace{a_n \in [\frac{1}{2}, 1] \subseteq [\frac{1}{4}, 1]}$

άρα $p(a_n) \leq 0$.

iii) Η ακολουθία συγκλίνει γιατί είναι φραγμένη και μονότονη.

Θέτουμε $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

Τότε $a_{n+1} \longrightarrow a$

Παίρνουμε τη σχέση

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{5a_n - 1}$$

και παίρνουμε όριο $n \to +\infty$ στα δύο σκέλη της.

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{5a-1} \geq 0$$

$\iff 2a = \sqrt{5a-1}$

$\iff 4a^2 = 5a - 1$

$\iff 4a^2 - 5a + 1 = 0$

$\iff p(a) = 0$ όπου p όπως πιο πάνω

Προκύπτουν δύο ρίζες $\alpha = \frac{1}{4}$

και $\alpha = 1$.

Από το i) έχουμε $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$

άρα $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Άρα η $\alpha = \frac{1}{4}$ απορρίπτεται.

Άρα $\alpha = 1$.