ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
Ασκήσεις
9α. Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα με Στοιχειώδεις Πράξεις

Κάλλια Παυλοπούλου

2022-2023

Άσκηση 1

Να εξεταστεί αν ο A είναι αντιστρέψιμος για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$.
Στην περίπτωση που είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο αντίστροφός του.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση:

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I_3}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 3\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha - 6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3}$$

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha-6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha-8} & -3 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

1) Αν $\boxed{\boldsymbol{\alpha = 8},}$ τότε ο τελευταίος πίνακας παίρνει τη μορφή:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & -3 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος .

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

2) Αν $\boxed{\alpha \neq 8,}$ τότε συνεχίζουμε τις γραμμοπράξεις εφαρμόζοντας στον τελευταίο πίνακα την $\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{\alpha-8} \cdot \gamma_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-8} & \frac{1}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - \gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{\alpha-8} & \frac{-1}{\alpha-8} & \frac{\alpha-6}{\alpha-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-8} & \frac{1}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2\gamma_3}$$

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

Η τελική μορφή του πίνακα (ανηγμένη κλιμακωτή) είναι η εξής:

Μοναδιαίος 3×3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha-2}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} & \frac{4}{\alpha-8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{\alpha-8} & \frac{-1}{\alpha-8} & \frac{\alpha-6}{\alpha-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-8} & \frac{1}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} \end{array}\right]$$

Αντίστροφος A^{-1}

Επομένως για $\alpha \neq 8$

ο $\boldsymbol{A}$ είναι αντιστρέψιμος

και ο αντίστροφός του είναι ο $\boldsymbol{A^{-1}}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-2}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} & \frac{4}{\alpha-8} \\ \frac{3}{\alpha-8} & \frac{-1}{\alpha-8} & \frac{\alpha-6}{\alpha-8} \\ \frac{-3}{\alpha-8} & \frac{1}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων, αν υπάρχει, ο

αντίστροφος πίνακας του $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in R$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο εύρεσης αντιστρόφου:

$$[\boldsymbol{B}|\boldsymbol{I_3}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2}$$

Άσκηση 2-λύση (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ \boxed{5} & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 5\gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{-6} & a-5 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 + 6\gamma_2}$$

Άσκηση 2-λύση (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-11 & 6 & -17 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - \gamma_2}$$

$$\boxed{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{a-11} & 6 & -17 & 1 \end{array}\right]}$$

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε περιπτώσεις:

1) Αν $\boxed{\underline{\alpha = 11},}$ τότε ο πίνακας $\underline{B}$ δεν αντιστρέφεται .

Άσκηση 2-λύση (συνέχεια)

2) Αν $\boxed{\alpha \neq 11}$, τότε συνεχίζουμε τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών εφαρμόζοντας στον τελευταίο πίνακα την $\gamma_3 \to \frac{1}{\alpha-11} \cdot \gamma_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{11}} & \frac{\mathbf{-17}}{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{11}} & \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{11}} \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 + \gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} + \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{11}} & \mathbf{-2} + \frac{\mathbf{-17}}{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{11}} & \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{11}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{11}} & \frac{\mathbf{-17}}{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{11}} & \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{11}} \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_3}$$

Άσκηση 2-λύση (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1-\dfrac{12}{\alpha-11} & 3+\dfrac{34}{\alpha-11} & \dfrac{-2}{\alpha-11} \\ 0 & 1 & 0 & 1+\dfrac{6}{\alpha-11} & -2+\dfrac{-17}{\alpha-11} & \dfrac{1}{\alpha-11} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{6}{\alpha-11} & \dfrac{-17}{\alpha-11} & \dfrac{1}{\alpha-11} \end{array}\right]$$

Μοναδιαίος 3×3

Αντίστροφος B^{-1}

Άρα για $a \neq 11$ ο πίνακας B αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του είναι ο B^{-1} που φαίνεται παραπάνω.

Άλυτες Ασκήσεις για εξάσκηση

1) Να βρεθεί με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων, αν υπάρχει, ο αντίστροφος πίνακας του

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

<u>Υπόδειξη</u>: Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον πίνακα $[\boldsymbol{C}|\boldsymbol{I_3}]$ με σκοπό να κάνουμε τον C ανηγμένο κλιμακωτό καταλήγουμε ότι ο C είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο :

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & 19 & -7 \\ 4 & 3 & -1 \\ -11 & -8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Άλυτες Ασκήσεις για εξάσκηση

2) Να βρεθεί με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων, αν υπάρχει, ο αντίστροφος πίνακας του

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον πίνακα $[D|I_3]$ με σκοπό να κάνουμε τον D ανηγμένο κλιμακωτό καταλήγουμε ότι ο D δεν είναι αντιστρέψιμος διότι είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον:

$$D_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άλυτες Ασκήσεις για εξάσκηση

3) Να βρεθεί με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων, αν υπάρχει, ο αντίστροφος πίνακας του

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον πίνακα $[F|I_3]$ με σκοπό να κάνουμε τον F ανηγμένο κλιμακωτό καταλήγουμε ότι ο F είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο :

$$F^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 7 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$