



# Γραμμική Άλγεβρα

## 7. Επίλυση Ομογενούς Γραμμικού Συστήματος $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ , $A \in M_{\mu \times \nu}$

### Παραδείγματα

Κάλλια Παυλοπούλου

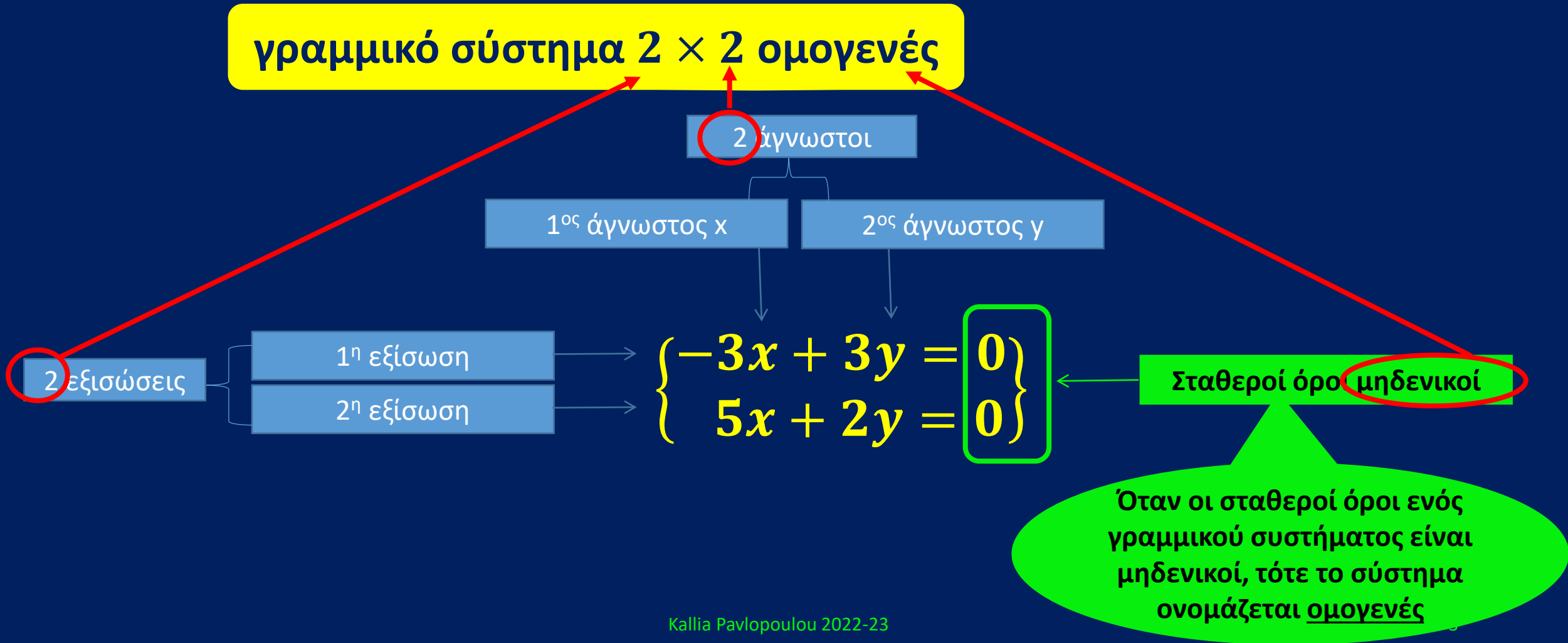
2022-2023

Στη συνέχεια,

θα χρησιμοποιήσουμε τη **θεωρία των πινάκων** για να αναπτύξουμε συστηματικές μεθόδους για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων (οι άγνωστοι υψωμένοι στην 1<sup>η</sup> δύναμη).

Πιο συγκεκριμένα, θα αρχίσουμε περιγράφοντας μία μέθοδο η οποία βασίζεται στη **θεωρία των γραμμοπράξεων**.

Παράδειγμα 1 : Θα ξεκινήσουμε μελετώντας ένα παράδειγμα ενός γραμμικού συστήματος με 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους όπου οι σταθεροί όροι είναι μηδενικοί.



# Παράδειγμα 1: ομογενές σύστημα $2 \times 2$

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$$

Ας το γράψουμε σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} -3x + 3y \\ 5x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

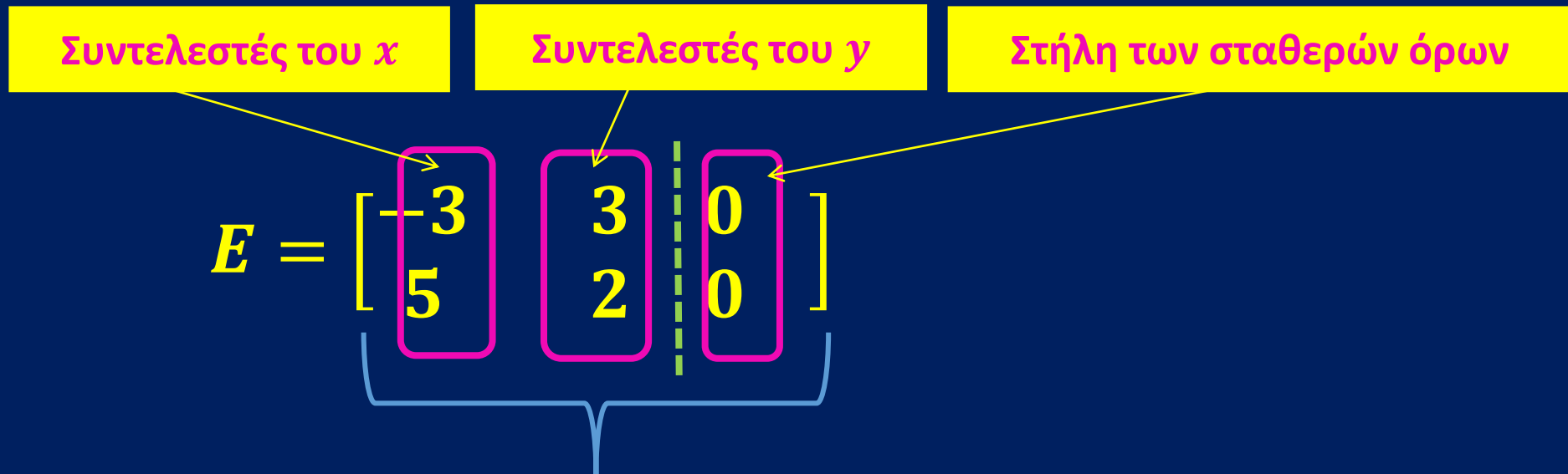
$\vec{0}$ : Πίνακας-στήλη ( $2 \times 1$ ) σταθερών όρων του συστήματος

$A$ : Πίνακας ( $2 \times 2$ ) συντελεστών του συστήματος

$\vec{x}$ : Πίνακας-στήλη ( $2 \times 1$ ) οι άγνωστοι του συστήματος

Άρα το σύστημα παίρνει τη μορφή  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ,  $A \in M_{2 \times 2}$

Το γραμμικό μας σύστημα «αντιπροσωπεύεται», καθορίζεται πλήρως, από τον επόμενο πίνακα (επαυξημένος) διότι διαθέτει όλες τις πληροφορίες : τους συντελεστές των αγνώστων και τους σταθερούς όρους!



$E$  : Επαυξημένος πίνακας του συστήματος, παραθέτοντας δίπλα στον πίνακα των συντελεστών τη στήλη των σταθερών όρων

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E = \left[ \begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Κάθε γραμμικό σύστημα εξισώσεων ανάγεται σε ένα ισοδύναμο γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον αρχικό αλλά σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

**Πολύ σημαντική πρακτική αξία!**

# Αναγωγή του επαυξημένου σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$E = \left[ \begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \frac{1}{-3} \cdot \gamma_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 5\gamma_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{7} \gamma_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] = E_R$$

The diagram illustrates the row reduction process of an augmented matrix  $E$  to its reduced row echelon form  $E_R$ . The initial matrix  $E$  is shown with a blue box around the coefficient matrix  $A$  and a pink box around the zero vector  $\vec{0}$ . The first step is  $\gamma_1 \rightarrow \frac{1}{-3} \cdot \gamma_1$ , resulting in a matrix with a leading 1 in the first row. The second step is  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 5\gamma_1$ , resulting in a matrix with a leading 1 in the first row and a 7 in the second row. The third step is  $\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{7} \gamma_2$ , resulting in a matrix with leading 1s in both rows. The final step is  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$ , resulting in the reduced row echelon form  $E_R$ , which is circled in red. The coefficient matrix  $A_R$  and the zero vector  $\vec{0}$  are also indicated.

Ο πίνακας  $E$  είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον  $E_R$  και ο  $A$  με τον  $A_R$

Ας δούμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον γραμμοϊσοδύναμο  $E_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$

Λύνω ως προς  $x, y$  (pivots).

$$A_R \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 0y = 0 \\ 0x + 1y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Το οποίο είναι ισοδύναμο με  
το αρχικό  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύση του συστήματος

Σε μορφή  
πίνακα

Το σύστημα  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$  έχει μία και μοναδική λύση την  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .



Ας παρατηρήσουμε τον πίνακα  $E_R$  :

$$E_R = \begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

2 βασικοί άγνωστοι:

αντιστοιχούν στα pivots  $(x, y)$ .

Παρατηρούμε πως ο βαθμός του πίνακα  $A$  είναι ίδιος με τον βαθμό του επαυξημένου  $E$  του συστήματος.

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) &= \text{rank}(E) \\ &= \text{αριθμός των pivots} = \\ &= \text{πλήθος των μη μηδενικών} \\ &= \text{γραμμών (σε κλιμακωτή} \\ &= \text{μορφή)} = 2 \end{aligned}$$

## Παράδειγμα 2: ομογενές σύστημα $3 \times 4$

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

Σε μορφή  
πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A$  : Πίνακας ( $3 \times 4$ )  
συντελεστών του συστήματος

$\vec{x}$  : Πίνακας-στήλη ( $4 \times 1$ )  
οι άγνωστοι του  
συστήματος

$\vec{0}$  : Πίνακας-  
στήλη ( $3 \times 1$ )  
σταθερών  
όρων του  
συστήματος

Το γραμμικό μας σύστημα «αντιπροσωπεύεται» από τον επόμενο πίνακα (επαυξημένος) διότι διαθέτει όλες τις πληροφορίες : τους συντελεστές και τους σταθερούς όρους!

Συντελεστές του  $x_1$

Συντελεστές του  $x_2$

Συντελεστές του  $x_3$

Συντελεστές του  $x_4$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$A$   $\vec{0}$

Στήλη των σταθερών όρων

# Αναγωγή του επαυξημένου σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$E = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2\gamma_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 3\gamma_1}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 2\gamma_2}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2\gamma_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = E_R$$

$\underbrace{\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{A_R} \quad \underbrace{\left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]}_{\vec{0}}$

Ας δούμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον γραμμοϊσοδύναμο  $E_R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

Λύνω ως προς  $x_1, x_3$ .

$$A_R \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -2x_4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Το οποίο είναι  
ισοδύναμο με το  
αρχικό  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_2, x_4, \in R$$

Λύση του συστήματος

Σε μορφή πίνακα

Το σύστημα  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$  έχει άπειρες λύσεις της μορφής  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_2, x_4, \in R$

Τις λύσεις θα μπορούσαμε να τις γράψουμε στην εξής μορφή (πίνακα-διανυσμάτων):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  και  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Δηλαδή το σύνολο λύσεων του συστήματος παράγεται από τα δύο αυτά διανύσματα.

Ας παρατηρήσουμε τον πίνακα  $E_R$  :

$$E_R = \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2 βασικοί άγνωστοι:

αντιστοιχούν στα pivots ( $x_1, x_3$ )

2 ελεύθεροι άγνωστοι:

αντιστοιχούν σε εκείνους όπου δεν υπάρχουν pivots στις αντίστοιχες στήλες ( $x_2, x_4$ ).

Παρατηρούμε πως ο βαθμός του πίνακα  $A$  είναι ίδιος με τον βαθμό του επαυξημένου  $E$  του συστήματος.

$rank(A) = rank(E)$   
= αριθμός των pivots =  
πλήθος των μη μηδενικών  
γραμμών (σε κλιμακωτή  
μορφή)=2