



14α. Επαναληπτικές Ασκήσεις

Κάλλια Παυλοπούλου | Γραμμική Άλγεβρα | 2022-23

ΑΣΚΗΣΗ 1

Για έναν τετραγωνικό πίνακα 3×3 ισχύει ότι

$$B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε τις ιδιοτιμές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B . Ο πίνακας B αντιστρέφεται; (δικαιολόγηση) Ο πίνακας B διαγωνοποιείται; (δικαιολόγηση) Αν ναι, ποια είναι η διαγωνοποιημένη του μορφή και ποιος είναι ο πίνακας που τον διαγωνοποιεί; Να υπολογίσετε τον πίνακα B .

Λύση

Εύκολα προκύπτει ότι ιδιοτιμές είναι οι 3, 0, -2, αφού παρατηρούμε ότι:

$$B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $\chi_B(\lambda) = \lambda(\lambda + 2)(3 - \lambda)$
Επειδή οι ιδιοτιμές είναι όλες διαφορετικές, ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος.
Ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα είναι ο P .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ο P είναι αντιστρέψιμος διότι τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές.

Ο B δεν αντιστρέφεται διότι $\det B = 3 \cdot 0 \cdot (-2) = 0$ (γινόμενο ιδιοτιμών).

Άρα αρκεί να βρούμε τον αντίστροφο του P για να υπολογίσουμε στη συνέχεια τον πίνακα B , από τη σχέση $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται ο 3×3 τετραγωνικός πίνακας $\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 1,00001 & 1 \\ 1,00001 & 1 & 1,00001 \\ 1 & 1,00001 & 1 \end{bmatrix}$. Να δείξετε ότι ο πίνακας Π έχει μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή.

Λύση

Θέτουμε $\alpha=1,00001$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Π είναι:

$$\begin{aligned} \chi_{\Pi}(\lambda) &= \det(\Pi - \lambda \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha & 1 \\ \alpha & 1-\lambda & \alpha \\ 1 & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ \alpha & 1-\lambda & \alpha \\ 1 & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ \alpha & 1-\lambda & 2\alpha \\ 1 & \alpha & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \cdot [(1-\lambda) \cdot (2-\lambda) - \alpha \cdot 2\alpha] = -\lambda \cdot (2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-2\alpha^2) = \\ &= -\lambda \cdot (\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2\alpha^2) \end{aligned}$$

Σημείωση:

- 1) Οι πράξεις που έγιναν για τον υπολογισμό της ορίζουσας είναι οι εξής $\Gamma 1 \rightarrow \Gamma 1 - \Gamma 3, \Sigma 3 \rightarrow \Sigma 3 + \Sigma 1$.
- 2) Για τον υπολογισμό της διακρίνουσας του τριωνύμου $\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2\alpha^2$ έχουμε $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - 2\alpha^2) = 9 - 8 + 8\alpha^2 = 1 + 8\alpha^2 > 0$.

Επομένως μία ιδιοτιμή είναι το 0 και έστω λ_1 και λ_2 οι άλλες δύο ιδιοτιμές του Π . Άρα:

$$\chi_{\Pi}(\lambda) = \det(\Pi - \lambda \cdot I_3) = -\lambda \cdot (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = -\lambda \cdot [\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2].$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 - 2\alpha^2 = 2 \cdot (1 - \alpha^2) < 0$, αφού $\alpha = 1,00001 > 1$.

Αφού το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ είναι αρνητικό, συμπεραίνουμε πως υπάρχουν δύο λύσεις ετερόσημες, μία θετική και μία αρνητική.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν το διάνυσμα $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 2 \\ d & e & f \end{bmatrix}$, $a, b, c, d, e, f \in R$, τότε είναι και ιδιοδιάνυσμα του πίνακα M^3 ;

Αν ναι, να δικαιολογήσετε την απάντησή σας και να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές των M και M^3 που αντιστοιχούν στο \vec{u} .

Λύση

Αφού $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα M τότε θα ισχύει:

$$M \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 2 \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a - 2b + c \\ 4 - 2 + 2 \\ d - 2e + f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a - 2b + c \\ 4 \\ d - 2e + f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Από όπου συμπεραίνουμε πως πρέπει να ισχύει $4 = -2\lambda$, επομένως $\lambda = -2$.

Αν λ ιδιοτιμή του \vec{u} , τότε $M \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$. Τότε:

$$M^3 \cdot \vec{u} = (M^2 \cdot M) \cdot \vec{u} = M^2 \cdot (M \cdot \vec{u}) = M^2 \cdot (\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot (M^2 \cdot \vec{u}) =$$

$$= \lambda \cdot [M \cdot (M \cdot \vec{u})] = \lambda \cdot [M \cdot (\lambda \cdot \vec{u})] = \lambda \cdot [\lambda \cdot (M \cdot \vec{u})] = \lambda \cdot [\lambda \cdot (\lambda \cdot \vec{u})] = \lambda^3 \cdot \vec{u}.$$

Επομένως $M^3 \cdot \vec{u} = \lambda^3 \cdot \vec{u}$, δηλαδή το \vec{u} είναι ιδιοδιάνυσμα του M^3 με ιδιοτιμή $\lambda^3 = -8$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Για ποια τιμή του a ο A διαγωνοποιείται;

Λύση

Ας υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$\begin{aligned} x_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_4) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & a & 1 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda) = \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda)^2(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, οι ιδιοτιμές του A είναι:

$$\lambda_1 = 2 \text{ (πολλαπλότητα 1),}$$

$$\lambda_2 = 3 \text{ (πολλαπλότητα 2) και } \lambda_3 = 1 \text{ (πολλαπλότητα 1)}$$

Για να διαγωνοποιείται ο A θα πρέπει η διάσταση του ιδιόχωρου V_3 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3 να είναι ίση με 2.

Ας βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$, λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{aligned} (A - 3 \cdot I_4)u = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 - 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 - 3 & a & 1 \\ 0 & 0 & 3 - 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_4 \rightarrow L_4 + 2L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \rightarrow (-1) \cdot L_1}]{L_4 \rightarrow L_4 + 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C.$$

Για να έχει ο ιδιόχωρος V_3 διάσταση 2 θα πρέπει $a = 0$ διότι το σύστημα θα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, αφού από την κλιμακωτή μορφή συμπεραίνουμε ότι $\text{rank} C = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

(i) Για ποιες τιμές των $\alpha, b \in \mathbb{R}$ ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος;

Λύση

(i) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B :

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & a \\ 3 & 0 & b - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) \cdot (b - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)^2 \cdot (b - \lambda). \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1) Αν $b = 2$, τότε ο πίνακας B έχει ιδιοτιμή $\lambda=2$ με πολλαπλότητα 3. Για να είναι ο B διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει η διάσταση του ιδιόχωρου με ιδιοτιμή 2 να είναι ίση με 3, δηλαδή $\dim V_2 = 3$. Ας δούμε το ομογενές σύστημα:

$$(B - 2 \cdot I) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 2 & a \\ 3 & 0 & 2 - 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ας μελετήσουμε το βαθμό του πίνακα του συστήματος:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 2, \text{ αν } a \neq 0 \\ 1, \text{ αν } a = 0 \end{cases}. \quad \text{Επομένως } \begin{cases} \dim V_2 = 3 - 2 = 1 \neq 3, \text{ αν } a \neq 0 \\ \dim V_2 = 3 - 1 = 2 \neq 3, \text{ αν } a = 0 \end{cases}$$

Άρα για $b = 2$ και $a \in \mathbb{R}$, δεν διαγωνοποιείται ο B .

2) Αν $b \neq 2$, τότε ο πίνακας B έχει ιδιοτιμή $\lambda=2$ με πολλαπλότητα 2 και ιδιοτιμή $\lambda = b$ με πολλαπλότητα 1. Σε αυτή την περίπτωση για να είναι ο πίνακας διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει $\dim V_2 = 2$. Ας δούμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} (B - 2 \cdot I) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 2 & a \\ 3 & 0 & b - 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b - 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ας μελετήσουμε το βαθμό του πίνακα του συστήματος:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{bmatrix} = \begin{cases} 2, & \text{αν } a \neq 0 \\ 1, & \text{αν } a = 0 \end{cases}. \quad \text{Επομένως } \begin{cases} \dim V_2 = 3 - 2 = 1 \neq 2, & \text{αν } a \neq 0 \\ \dim V_2 = 3 - 1 = 2, & \text{αν } a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & b-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Άρα για $a = 0$ και $b \neq 2$, ο πίνακας B διαγωνοποιείται.

(ii) Για $a = 0$ και για $b = 1$, να βρείτε τον διαγώνιο πίνακα D που είναι όμοιος με τον B καθώς και τον πίνακα P που τον διαγωνοποιεί.

Λύση (ii) Για $a = 0$ και για $b = 1$ έχουμε $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Οι ιδιοτιμές του (από το πρώτο σκέλος της άσκησης) είναι $\lambda=2$ με πολλαπλότητα 2 και ιδιοτιμή $\lambda = b = 1$ με πολλαπλότητα

1. Άρα ο όμοιος πίνακας με τον B είναι ο $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα με ιδιοτιμή $\lambda=2$ λύνουμε το σύστημα:

$$(B - 2 \cdot I) \cdot u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 3 & 0 & 1-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε δηλαδή την εξίσωση: $3x - z = 0 \Leftrightarrow x = \frac{z}{3}$. Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος

$$\text{είναι: } S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, y, z \in R \right\}.$$

- Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή $\lambda=1$ λύνουμε το σύστημα:

$$(B - 1 \cdot I) \cdot u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ 3 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Το σύστημα έχει τη μορφή: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in R \end{cases}.$$

$$\text{Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι: } S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R \right\}.$$

Και ο πίνακας P που διαγωνοποιεί τον B είναι ο εξής: $P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

(i) Για ποιες τιμές του $b \in \mathbb{R}$ ο πίνακας $\Gamma = \begin{bmatrix} b-6 & 0 & 2-b \\ 6 & -1 & -6 \\ b-2 & 0 & -b-2 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος;

Λύση

(i) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Γ :

$$\begin{aligned} \chi_{\Gamma}(\lambda) &= \det(\Gamma - \lambda I) = \begin{vmatrix} b-6-\lambda & 0 & 2-b \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ b-2 & 0 & -b-2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} b-6-\lambda & 2-b \\ b-2 & -b-2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-1-\lambda) \cdot [(b-6-\lambda) \cdot (-b-2-\lambda) - (2-b)(b-2)] = \\ &= -(\lambda+1)(-b^2-2b-b\lambda+6b+12+6\lambda+b\lambda+2\lambda+\lambda^2+b^2+4-4b) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda^2+8\lambda+16) = -(\lambda+1)(\lambda+4)^2. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, οι ιδιοτιμές του Γ είναι :

$$\lambda_1 = -1 \text{ (πολλαπλότητα 1) και } \lambda_2 = \lambda_3 = -4 \text{ (πολλαπλότητα 2)}$$

Για να δούμε αν διαγωνοποιείται ή όχι ο πίνακας Γ μπορούμε να το ελέγξουμε με δύο τρόπους:

1^{ος}) Με τη γεωμετρική πολλαπλότητα, δηλαδή η διάσταση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα 2, να είναι και αυτή 2 [$\dim V_{-4} = n - \text{rank}(\Gamma - \lambda I)$]

Για να διαγωνοποιείται ο Γ θα πρέπει η διάσταση του ιδιόχωρου V_{-4} που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -4 να είναι ίση με 2.

$$[\Gamma - (-4) \cdot I_3] \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b-2 & 0 & 2-b \\ 6 & 3 & -6 \\ b-2 & 0 & 2-b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-2)x - (b-2)z = 0 \\ 6x + 3y - 6z = 0 \\ (b-2)x - (b-2)z = 0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

- Αν $b \neq 2$ τότε

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0, z \in \mathbb{R} \\ x = z \end{cases}$$

Άρα

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R \right\}$$

Δηλαδή αν $b \neq 2$ έχουμε ένα ιδιοδιάνυσμα, $\dim V_{-4} = 1$ και ο Γ δεν διαγωνοποιείται.

- Αν $b = 2$ τότε

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 6x + 3y - 6z = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 2z, x, y \in R \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -2x + 2z \\ z \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x, z \in R \right\}$$

Δηλαδή αν $b = 2$ έχουμε $\dim V_{-4} = 2$ και ο Γ διαγωνοποιείται.

2^{ος}) Ο Γ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων.

Αν $m_\Gamma(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda + 4)$. Θα ελέγξουμε αν ο Γ το μηδενίζει.

Κάνοντας πράξεις:

$$(\Gamma + I_3)(\Gamma + 4I_3) = 0_3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b^2 - 7b + 10 & 0 & 3b - 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3b + 6 & 0 & 3b - 6 \end{bmatrix} = 0_3 \Leftrightarrow b = 2$$

(ii) Για τις τιμές που υπολογίσατε να βρείτε μια διαγωνοποίηση του πίνακα Γ .

- **Λύση (ii)** Για $b = 2$ έχουμε για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3 = -4$ (πολλαπλότητα 2)

$$\text{έχουμε τα ιδιοδιανύσματα } \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Θα υπολογίσουμε το ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ (πολλαπλότητα 1):

- Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ λύνουμε το σύστημα:

$$(\Gamma + 1 \cdot I) \cdot \vec{u}_1 = 0$$

$$[\Gamma - (-1) \cdot I_3] \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 + 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 + 1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 0 \\ 6x + 0y - 6z = 0 \\ -3z = 0 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, y \in R \right\}$$

Και βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Επομένως μία διαγωνοποίηση του Γ είναι η εξής:

$$\Gamma = P \cdot D \cdot P^{-1} = [\vec{u}_1 | \vec{u}_2 | \vec{u}_3] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot [\vec{u}_1 | \vec{u}_2 | \vec{u}_3]^{-1}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \times n$ αντιστρέψιμο πίνακα A , ισχύει $|adjA| = |A|^{n-1}$ και $adj(adjA) = |A|^{n-2} \cdot A$.

Λύση

(α) Για οποιονδήποτε $n \times n$ πίνακα A , ισχύει

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot adjA \Leftrightarrow I = A \cdot adjA \cdot \frac{1}{\det A} \Leftrightarrow$$

$$A \cdot adjA = \det A \cdot I \Leftrightarrow A \cdot adjA = |A| \cdot I$$

$A \cdot adjA = |A| \cdot I \Rightarrow |A \cdot adjA| = ||A| \cdot I| \Rightarrow |A| \cdot |adjA| = |A|^n$ (αριθμός επί ορίζουσα του μοναδιαίου)

Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος και $|A| \neq 0$ προκύπτει

$$|adjA| = |A|^n \cdot \frac{1}{|A|} \Leftrightarrow |adjA| = |A|^{n-1}$$

Άρα

$$|adjA| = |A|^{n-1} \quad (1)$$

(β) Για το δεύτερο σκέλος, έχουμε

$$A \cdot adjA = |A| \cdot I \Rightarrow adjA = |A| \cdot A^{-1} \Rightarrow (adjA)^{-1} = |A|^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|adjA|} \cdot adj(adjA) = |A|^{-1} \cdot A \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{|A|^{n-1}} \cdot adj(adjA) = |A|^{-1} \cdot A \Rightarrow$$

$$adj(adjA) = |A|^{n-1} \cdot |A|^{-1} \cdot A \Rightarrow$$

$$\mathit{adj}(\mathit{adj}A) = |A|^{n-2} \cdot A$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Έστω δύο τετραγωνικοί πίνακες A και B τέτοιοι ώστε ο A είναι αντιστρέψιμος, $AB = BA$ και λ_0 μια απλή ιδιοτιμή του B με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα \vec{x}_0 . Να αποδείξετε ότι το \vec{x}_0 είναι ιδιοδιάνυσμα και του A .

Λύση

Από τον ορισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, έχουμε $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ και

$$B \cdot \vec{x}_0 = \lambda_0 \cdot \vec{x}_0 \Rightarrow A \cdot B \cdot \vec{x}_0 = A \cdot \lambda_0 \cdot \vec{x}_0 \Rightarrow B \cdot (A \cdot \vec{x}_0) = \lambda_0 \cdot (A \cdot \vec{x}_0)$$

Συνεπώς, το διάνυσμα $A \cdot \vec{x}_0$ (το οποίο είναι μη μηδενικό διότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$) είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 .

Επειδή όμως αυτή η ιδιοτιμή είναι απλή, έχει πολλαπλότητα 1 και πρέπει τα διανύσματα \vec{x}_0 και $A \cdot \vec{x}_0$ να είναι συγγραμμικά.

Άρα υπάρχει αριθμός μ_0 τέτοιος ώστε $A \cdot \vec{x}_0 = \mu_0 \cdot \vec{x}_0$ και το \vec{x}_0 είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ_0 του A .