ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
13. Θεώρημα Cayley-Hamilton-Ελάχιστο Πολυώνυμο

Κάλλια Παυλοπούλου

2022-2023

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1) Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι

$$X_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2\,.$$

2) Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A «ικανοποιεί» την χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλαδή μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο:

$$X_A(A) = A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X_A(A) = 0_{2\times 2}}$$

Αυτό δεν είναι τυχαίο. Ισχύει το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Κάθε πίνακας $A \in M_{n\times n}$ μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο

$X_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I_n)$, δηλαδή

$$\boxed{X_A(A) = 0_{n\times n}}$$

Σημείωση:

Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός $n \times n$ πίνακα A είναι το

$X_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I_n) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$, τότε

$$\boxed{X_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0_{n\times n}}$$

Προσοχή! Το θεώρημα Cayley-Hamilton ισχύει για όλους τους τετραγωνικούς πίνακες, όχι μόνο για τους διαγωνοποιήσιμους.

Παράδειγμα 2-μία εφαρμογή του Θεωρήματος Cayley-Hamilton

- Έχουμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)^3 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

Σύμφωνα με θεώρημα Cayley-Hamilton:

$$\chi_A(A) = 0_3 \Leftrightarrow -A^3 + 6 \cdot A^2 - 12A + 8 \cdot I_3 = 0_3$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \left(-A^2 + 6 \cdot A - 12 \cdot I_3\right) = -8 \cdot I_3$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \left\{\frac{1}{8}\left(A^2 - 6 \cdot A + 12 \cdot I_3\right)\right\} = I_3$$

Ο αντίστροφος του A

Κάνοντας πράξεις υπολογίζουμε: $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 3

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$. Να υπολογίσετε τους πίνακες A^{-1}, A^5.

Λύση:

1) Υπολογίζουμε την ορίζουσα $det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 0 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$.

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda)=det(A-\lambda I_3)=(1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)=-\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda+2$$

2) Η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι $-\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda+2=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)=0$ έχει μόνο μία πραγματική λύση την $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=1+i, \lambda_3=1-i$.

3) Μπορούμε να υπολογίσουμε τους ζητούμενους πίνακες αφού βρούμε τα ιδιοδιανύσματα και τον διαγωνοποιήσουμε. Αποφεύγουμε όμως όλη τη διαδικασία των πράξεων με τη βοήθεια του Θεωρήματος Cayley-Hamilton, ως εξής:

Παράδειγμα 3 – Λύση (συνέχεια)

- **Ισχύει ότι**
- $\chi_A(A) = 0_3 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0_3 \Leftrightarrow$
- $-A^3 + 3A^2 - 4A + 2I_3 = 0_3 \Leftrightarrow$
- $A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3 = 0_3 \Leftrightarrow$
- $A\left(A^2 - 3A + 4I_3\right) = 2I_3 \Leftrightarrow A\left[\frac{1}{2}\left(A^2 - 3A + 4I_3\right)\right] = I_3$

Άρα

- $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3A + 4I_3\right) = \frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{2}A + 2I_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 3 – Λύση (συνέχεια)

- Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε:

$$A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3 = 0_3 \Leftrightarrow \boxed{A^3 = 3A^2 - 4A + 2I_3}$$

- Για τον υπολογισμό του πίνακα A^5 χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του θεωρήματος Cayley-Hamilton έχουμε:

$$A^5 = A^3 \cdot A^2 = \left(3A^2 - 4A + 2I_3\right)A^2 = 3A^4 - 4A^3 + 2A^2 = 3AA^3 - 4A^3 + 2A^2 =$$

$$3A(3A^2 - 4A + 2I_3) - 4(3A^2 - 4A + 2I_3) + 2A^2 =$$

$$9A^3 - 12A^2 + 6A - 12A^2 + 16A - 8I_3 + 2A^2 =$$

$$9(3A^2 - 4A + 2I_3) - 12A^2 + 6A - 12A^2 + 16A - 8I_3 + 2A^2 =$$

$$27A^2 - 36A + 18I_3 - 12A^2 + 6A - 12A^2 + 16A - 8I_3 + 2A^2 =$$

$$\boxed{5A^2 - 14A + 10I_3}$$

Παράδειγμα 3 – Λύση (συνέχεια)

- Για τον υπολογισμό του πίνακα A^5 , θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την ευκλείδια διαίρεση:
    - $\lambda^5 = \left(\boldsymbol{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2}\right)\left(\boldsymbol{\lambda^2 + 3\lambda} + 5\right) + (\boldsymbol{5\lambda^2 - 14\lambda} + 10)$.
- Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε :

$$\boldsymbol{\chi_A(A) = 0_3 \Leftrightarrow A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3 = 0_3}$$

Άρα

- $A^5 = \left(\boldsymbol{A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3}\right)\left(\boldsymbol{A^2 + 3A} + 5\boldsymbol{I_3}\right) + (\boldsymbol{5A^2 - 14A} + 10\boldsymbol{I_3}) \Leftrightarrow$
- $A^5 = 0_3 \cdot \left(\boldsymbol{A^2 + 3A} + 5\boldsymbol{I_3}\right) + (\boldsymbol{5A^2 - 14A} + 10\boldsymbol{I_3}) \Leftrightarrow$
- $\boxed{A^5 = \boldsymbol{5A^2 - 14A} + 10\boldsymbol{I_3}}$

Παράδειγμα 4

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Να υπολογίσετε

(α) μία διαγωνοποίηση του πίνακα A.

(β) Μία διαγωνοποίηση του A^5.

(γ) Τον A^5.

(δ) Τον A^{-1}, A^{-2}, A^{-3}.

Λύση:

(α) Υπολογίζουμε την ορίζουσα

$$det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\cdot[(-3-\lambda)(2-\lambda)+4] =$$

$$= -(2+\lambda)\left(\lambda^2+\lambda-2\right) = -(\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda-1) = -(\lambda+2)^2(\lambda-1) = -\lambda^3-3\lambda^2+4.$$

Παράδειγμα 4– Λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 1) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$

Η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) = 0$ έχει

πραγματικές λύσεις τις $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ και $\lambda_3 = 1$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ υπολογίζουμε τα ιδιοδιανυσματα: $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 1$ υπολογίζουμε το ιδιοδιάνυσμα: $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Άρα ο A διαγωνοποιείται (αφού στην διπλή ιδιοτιμή αντιστοιχούν 2 ιδιοδιανύσματα) ως εξής:

$$\boxed{A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}}$$

Παράδειγμα 4– Λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(β) Άρα ο A διαγωνοποιείται (αφού στην διπλή ιδιοτιμή αντιστοιχούν 2 ιδιοδιανύσματα) ως εξής:

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 1^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

(γ) Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε : $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$

$$\chi_A(A) = 0_3 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 - 4I_3 = 0_3 \Leftrightarrow A^4 + 3A^3 - 4A = 0_3 \Leftrightarrow A^4 = -3A^3 + 4A$$

$$\chi_A(A) = 0_3 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 - 4I_3 = 0_3 \Leftrightarrow A^5 + 3A^4 - 4A^2 = 0_3 \Leftrightarrow A^5 = -3A^4 + 4A^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^5 = -3(-3A^3 + 4A) + 4A^2 \Leftrightarrow A^5 = 9A^3 + 4A^2 - 12A$$

$$\Leftrightarrow A^5 = 9(-3A^2 + 4I_3) + 4A^2 - 12A \quad \Leftrightarrow A^5 = -27A^2 + 36I_3 + 4A^2 - 12A$$

$$\boxed{\Leftrightarrow A^5 = -23A^2 - 12A + 36I_3}$$

Παράδειγμα 4– Λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(δ) Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε :

$$\chi_A(A) = 0_3 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 - 4I_3 = 0_3 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 = 4I_3 \Leftrightarrow A\left(A^2 + 3A\right) = 4I_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \boxed{\frac{1}{4}\left(A^2 + 3A\right)} = I_3 \qquad \boxed{\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2 + 3A\right) \ (1)}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2 + 3A\right) \Leftrightarrow A^{-2} = \frac{1}{4}\left(A^2 + 3A\right) \cdot A^{-1} \Leftrightarrow A^{-2} = \frac{1}{4}(A + 3I_3)$$

$$\Leftrightarrow A^{-2} \cdot A^{-1} = \frac{1}{4}(A + 3I_3) \cdot A^{-1} \Leftrightarrow A^{-3} = \frac{1}{4}\left(I_3 + 3A^{-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} A^{-3} = \frac{1}{4}\left[I_3 + 3 \cdot \frac{1}{4}\left(A^2 + 3A\right)\right] \Leftrightarrow A^{-3} = \frac{1}{4} I_3 + \frac{3}{16}\left(A^2 + 3A\right) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\Leftrightarrow A^{-3} = \frac{1}{4} I_3 + \frac{3}{16} \cdot A^2 + \frac{9}{16} \cdot A}$$

Ελάχιστο πολυώνυμο

Έστω A ένας πίνακας $n \times n$. Ένα μη μηδενικό πολυώνυμο $p(x)$ λέγεται ελάχιστο πολυώνυμο του A αν ισχύουν τα παρακάτω:

1) $p(A) = 0$
2) Έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα
3) Κάθε άλλο πολυώνυμο $q(x)$ με $q(A) = 0$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με του $p(x)$.

- Το ελάχιστο πολυώνυμο (the minimum / minimal polynomial) είναι το μη μηδενικό πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού, που μηδενίζεται από τον τετραγωνικό πίνακα και συμβολίζεται $m_A(\lambda)$.

Ελάχιστο πολυώνυμο

Ισχύουν τα εξής:

1) Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ είναι μοναδικό.

2) Οι ρίζες του ελάχιστου πολυωνύμου $m_A(\lambda)$ είναι ακριβώς οι ιδιοτιμές του A, πιθανώς με μικρότερες πολαπλότητες.

3) Εάν το $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{a_n}$

τότε το $m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{b_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{b_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{b_n}$

Όπου $1 \leq b_1 \leq \alpha_1, 1 \leq b_2 \leq \alpha_2, \dots, 1 \leq b_n \leq \alpha_n$.

4) Το $m_A(\lambda)$ διαιρεί πάντα το $\chi_A(\lambda)$.

5) Αν το $\chi_A(\lambda)$ έχει n διακεκριμένες ρίζες πολλαπλότητας 1 τότε

$$\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)$$

Ελάχιστο πολυώνυμο-διαγωνοποίηση

- Ισχύει το εξής:

- Ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν το ελάχιστο πολυώνυμό του $m_A(\lambda)$ έχει όλες τις ρίζες του απλές (πολλαπλότητας 1), δηλαδή
$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

Θεώρημα

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος

2) Υπάρχουν n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A

3) Το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων, δηλαδή της μορφής :

$\boldsymbol{m_A(\lambda)} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)$ **, όπου** $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k}$ **είναι ανά δύο διάφοροι.**

Παράδειγμα 5

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{bmatrix}$.

Λύση:

1) $det(A-\lambda I_3)=X_A(\lambda)=-(\lambda+1)^2(\lambda-8)$

2) **Πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα**

$(\lambda+1)^2(\lambda-8)$ ή $(\lambda+1)(\lambda-8)$

3) **Παρατηρούμε ότι:**

$$(A+I_3)(A-8I_3)=\begin{bmatrix}3+1&2&4\\2&0+1&2\\4&2&3+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3-8&2&4\\2&0-8&2\\4&2&-8\end{bmatrix}=0_3$$

Άρα $m_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-8)=\lambda^2-7\lambda-8$

Επομένως ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

Παράδειγμα 6

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Λύση:

1) $\det(A - \lambda I_3) = X_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$

2) Πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα

$(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$ ή $(\lambda - 2)(\lambda - 1)$

3) Παρατηρούμε ότι:
$(A - 2I_3)(A - I_3) \neq 0_3$

Άρα $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$

Επομένως ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.