



# Γραμμική Άλγεβρα Ασκήσεις 12α. Διαγωνοποίηση Πίνακα

Κάλλια Παυλοπούλου

2022-2023

## Άσκηση 1

Δίνεται τετραγωνικός πίνακας  $A$  τέτοιος ώστε:  $A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ .

- I. Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  και τις ιδιοτιμές του.
- II. Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων που βρήκατε στο (i), μπορείτε να αποφασίσετε αν ο  $A$  διαγωνοποιείται και αν αντιστρέφεται; (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)
- III. Αν ο  $A$  διαγωνοποιείται, να βρείτε μια διαγωνοποίησή του, δηλαδή, να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $P$  που διαγωνοποιεί τον  $A$  και έναν διαγώνιο πίνακα  $D$  όμοιο με τον  $A$ .
- IV. Αν αντιστρέφεται, να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του  $A^{-1}$ , χωρίς να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα του  $A$ .

## Άσκηση 1-λύση

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές}$$

(i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -12 & 4 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -1 & 5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ \bullet \quad &= (3 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} - (-12) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = \\ \bullet \quad &= (3 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 10) + 12(\lambda - 1) + 4(-5 - \lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2. \end{aligned}$$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το  $x_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$ .

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $x_A(\lambda)$  είναι όλες οι ιδιοτιμές του  $A$ , δηλαδή

$$x_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

ιδιοτιμές

## Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ διαγωνοποιείται; αντιστρέφεται;}$$

(ii) Ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται διότι έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, άρα έχει τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

- Ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται διότι έχει μη μηδενική ορίζουσα, αφού:
- $\det(A) = x_A(0) = -2 \neq 0$  ή αλλιώς  $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2$ .

## Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ ιδιοδιανύσματα}$$

(iii) Για να βρούμε τον πίνακα  $P$  ο οποίος διαγωνοποιεί τον πίνακα  $A$ , αρκεί να βρούμε τα ιδιοδιανύσματά του.

• Α) Για  $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2 \cdot I_3) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -12 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & -12 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα, } \vec{u}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -16/7 \\ 1/7 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R$$

## Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ ιδιοδιανύσματα}$$

$$\text{Β) } \lambda_2 = 1$$

$$(A - 1 \cdot I_3) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -12 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -12 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet \text{ Άρα, } \vec{u}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R$$

$$\text{Γ) Για } \lambda_3 = -1$$

$$(A - (-1) \cdot I_3) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -12 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -12 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet \text{ Άρα, } \vec{u}_{\lambda_3} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -5/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R.$$

• Επομένως:

$$P = \begin{bmatrix} -16 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

## Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον αντίστροφο του  $P$ .

$$\bullet \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -16 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -16 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -21 & 1 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -7 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\bullet \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & -2 & -21 & 1 & 16 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/3 & -2/3 \end{array} \right].$$

Άρα  $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 7 \\ -1/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$  και μία διαγωνοποίηση του  $A$  είναι η εξής:  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ .

(iv) Αφού ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος, αν  $\lambda$  μια ιδιοτιμή του  $A$ , τότε  $\frac{1}{\lambda}$  ιδιοτιμή του  $A^{-1}$ .

Άρα, οι τρεις ιδιοτιμές του  $A^{-1}$  είναι οι εξής:  $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ .

## Άσκηση 2

Δίνεται ο πίνακας  $A \in M_{3 \times 3}$ , τέτοιος ώστε:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

α) Να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $P$  τέτοιοι ώστε  $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

β) Να βρείτε τον πίνακα  $P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P$  για τον πίνακα  $P$  που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα (α).

γ) Να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $Q$  τέτοιοι ώστε  $Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$ .



## Άσκηση 2α-λύση

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

α) Ιδιοτιμές : 2, -1, 3 (στοιχεία της κυρίας διαγωνίου ενός άνω τριγωνικού πίνακα)

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

• Άρα:  $P^{-1} \cdot A \cdot P = D \Leftrightarrow P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1} \Leftrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

- Υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις 3 διαφορετικές ιδιοτιμές και δημιουργούμε τον πίνακα  $P$  :

$$P = \begin{bmatrix} -1/3 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Άσκηση 2β-λύση

Να βρείτε τον πίνακα  $P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P$  για τον πίνακα  $P$  του ερωτήματος (α).

β)

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D \Leftrightarrow (P^{-1} \cdot A \cdot P)^{-1} = D^{-1} \Leftrightarrow P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P = D^{-1}$$

Άρα,

$$P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P = D^{-1} = \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

## Άσκηση 2γ-λύση

Να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $Q$  τέτοιον ώστε  $Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$

γ) Ο πίνακας  $Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q$  μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^3 = (D_1)^3$$

- Επομένως ο πίνακας  $Q$  αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του  $A$  τοποθετημένα σε άλλη σειρά. Η σειρά αυτή υποδεικνύεται από τον πίνακα  $D_1$ .

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$