<u>Μάθημα 3º</u>

<u>*Ευθεία στο χώρο τυπολόγιο*</u>

Θα παρουσιάσουμε ένα χρήσιμο τυπολόγιο που θα αφορά στην ευθεία ως γεωμετρικό αντικείμενο του τρισδιάστατου χώρου.

Γωνία μεταξύ δύο ευθειών

Θεωρούμε ένα σημείο Ο του τρισδιάστατου χώρου και ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων x, y και z με κέντρο το σημείο αυτό. Είδαμε ότι για μια ευθεία στο χώρο μπορούμε να προσδιορίσουμε την διανυσματική της εξίσωση εάν γνωρίζουμε δύο σημεία που ανήκουν σε αυτήν ή ένα σημείο το οποίο ανήκει σε αυτήν και ένα διάνυσμα στο οποίο είναι παράλληλο.

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του τρισδιάστατου χώρου με διανυσματικές εξισώσεις

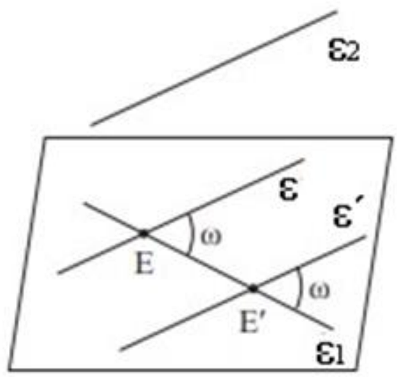
$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = (x_A + ta_1, y_A + tb_1, z_A + tc_1)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = (x_B + ta_2, y_B + tb_2, z_B + tc_2)$$

Δηλαδή η ευθεία ε_1 περνά από το σημείο Α και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (α_1,b_1,c_1) ενώ η ευθεία ε_2 περνά από το σημείο Β και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (α_2,b_2,c_2).

Εάν οι ευθείες συμπίπτουν ή είναι παράλληλες τότε η γωνία μεταξύ τους είναι μηδενική. Εάν τέμνονται τότε είναι συνεπίπεδες και η γωνία μεταξύ τους ορίζεται όπως και στην περίπτωση του επιπέδου δηλαδή

$$\omega = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\langle (a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)\rangle}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)$$

Μένει η περίπτωση όπου οι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες. Στην περίπτωση αυτή από τυχαίο σημείο της ευθείας ε_1 φέρνουμε μια ευθεία ε η οποία είναι παράλληλη στην ε_2.



Ορίζουμε ως γωνία των δύο ασύμβατων ευθειών ε_1 και ε_2 την γωνία ω μεταξύ των ευθειών ε και ε_1.
Η γωνία ω ορίζεται με τον πιο πάνω τύπο.

Απόσταση σημείου από ευθεία

Θεωρούμε μια ευθεία ε με διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r}:\Re \to \Re : t \to \bar{r}(t) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

και ένα σημείο Α με συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A). Η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε ισούται με

$$d(A,\varepsilon) = \frac{\left\|(x_A - x_0, y_A - y_0, z_A - z_0)\times(a,b,c)\right\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Κοινή κάθετος δύο ευθειών

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του τρισδιάστατου χώρου με διανυσματικές εξισώσεις

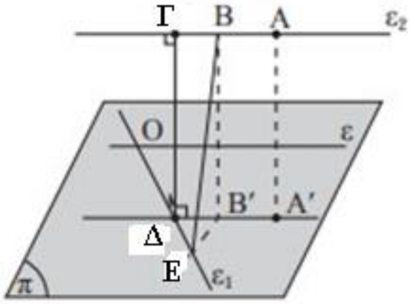
$$\bar{r}_1 :\Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = (x_A + ta_1, y_A + tb_1, z_A + tc_1)$$
$$\bar{r}_2 :\Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = (x_B + ta_2, y_B + tb_2, z_B + tc_2)$$

Η κοινή κάθετος μεταξύ δύο ασύμβατων ευθειών ε_1 και ε_2 έχει δύο σημεία τομής με τις ευθείες αυτές. Έστω Γ το σημείο τομής με την ε_1 και Δ το σημείο τομής με την ε_2. Οι συντεταγμένες των δύο σημείων είναι

$$(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma) = (x_A, y_A, z_A) + \\ + \frac{[(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A),(a_2,b_2,c_2),(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)]}{\left\|(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)\right\|^2}(a_1,b_1,c_1)$$
$$(x_\Delta, y_\Delta, z_\Delta) = (x_B, y_B, z_B) + \\ + \frac{[(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A),(a_1,b_1,c_1),(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)]}{\left\|(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)\right\|^2}(a_2,b_2,c_2)$$

Η εξίσωση της κοινής καθέτου των δύο ασύμβατων ευθειών είναι

$$\bar{r}_k :\Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_k(t) = (x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma) + t(x_\Delta - x_\Gamma, y_\Delta - y_\Gamma, z_\Delta - z_\Gamma)$$



Απόσταση μεταξύ δύο ευθειών

Έστω δύο ασύμβατες ευθείες ε_1 και ε_2 του τρισδιάστατου χώρου με διανυσματικές εξισώσεις

$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = (x_A + ta_1, y_A + tb_1, z_A + tc_1)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = (x_B + ta_2, y_B + tb_2, z_B + tc_2)$$

Ορίζουμε ως απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος το οποίο ανήκει πάνω στην κοινή κάθετο των δύο ευθειών.
Το μήκος αυτό είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο ευθειών και ισούται με

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right|}{\left\| (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) \right\|}$$

Ειδική περίπτωση: Εάν οι ευθείες ε_1 και ε_2 ανήκουν στο επίπεδο xy και είναι παράλληλες δηλαδή έχουν αλγεβρικές εξισώσεις

$$y = a_1 + bx$$
$$y = a_2 + bx$$

τότε η απόστασή τους ισούται με

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|a_2 - a_1|}{\sqrt{1 + b^2}}$$

Πράγματι έστω το σημείο με συντεταγμένες $E = (0, \alpha_1)$ το οποίο είναι πάνω στην ευθεία $y = \alpha_1 + bx$. Τότε η απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία $y = \alpha_2 + bx$ ισούται με

$$d(E, \varepsilon_2) = \frac{|b \cdot 0 - 1 \cdot a_1 + a_2|}{\sqrt{b^2 + 1}} \Rightarrow d(E, \varepsilon_2) = \frac{|a_2 - a_1|}{\sqrt{b^2 + 1}}$$

Η παραπάνω απόσταση είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών.

Εάν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες στο χώρο, τότε $(\alpha_1, b_1, c_1) = \lambda(\alpha_2, b_2, c_2)$ όπου λ πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός. Εάν η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο A με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A) και η ευθεία ε_2 διέρχεται από το σημείο B με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x_B, y_B, z_B) τότε η απόσταση τους ισούται με

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\|(x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B) \times (a_1, b_1, c_1)\|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

Προβολή σημείου πάνω σε ευθεία

Θεωρούμε μια ευθεία ε με διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

και ένα σημείο Α = (x_A, y_A, z_A) που δεν ανήκει στην ευθεία ε. Θέλουμε να βρούμε την προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ε.

Έστω Β το σημείο που είναι η προβολή του σημείου Α. Τότε το διάνυσμα ΑΒ θα είναι κάθετο στην ευθεία ε δηλαδή θα ισχύει ότι

$$\langle (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A), (a, b, c) \rangle = 0 \Rightarrow a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ax_B + by_B + cz_B = ax_A + by_A + cz_A$$

Το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία ε επομένως υπάρχει τιμή t_0 της παραμέτρου t τέτοια ώστε

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_0, y_0, z_0) + t_0(a, b, c)$$

Δηλαδή έχουμε και την σχέση

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_0 + at_0, y_0 + bt_0, z_0 + ct_0)$$

Άρα έχουμε ότι

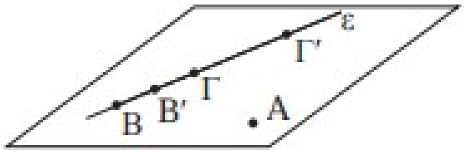
$$ax_B + by_B + cz_B = ax_A + by_A + cz_A \Rightarrow$$
$$a(x_0 + at_0) + b(y_0 + bt_0) + c(z_0 + t_0 c) = ax_A + by_A + cz_A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)t_0 = a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0) + c(z_A - z_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_0 = \frac{a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0) + c(z_A - z_0)}{(a^2 + b^2 + c^2)} = -\frac{ax_A + by_A + cz_A - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

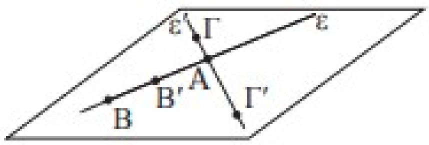
Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Β – που είναι η ζητούμενη προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ε – έχει συντεταγμένες

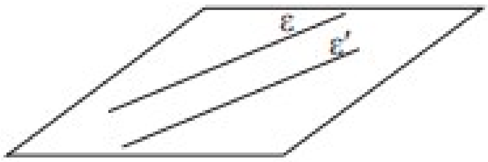
$$(x_B, y_B, z_B) = (x_0, y_0, z_0) + \frac{a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0) + c(z_A - z_0)}{(a^2 + b^2 + c^2)}(a, b, c)$$

Επίπεδα στον τρισδιάστατο χώρο

Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία ότι ένα επίπεδο μπορεί να οριστεί με τέσσερεις τρόπους
α) από μία ευθεία και ένα σημείο που δεν ανήκει στην ευθεία
β) από δύο τεμνόμενες ευθείες
γ) από δύο παράλληλες ευθείες
δ) από τρία μη συνευθειακά σημεία







Οι τέσσερεις τρόποι αυτοί είναι ισοδύναμοι. Έστω Ο ένα σημείο του τρισδιάστατου χώρου και ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων x, y και z με κέντρο το σημείο αυτό. Θα βρούμε μια εξίσωση του επιπέδου το οποίο ορίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες. Έστω τρία μη συνευθειακά σημεία του τρισδιάστατου χώρου τα οποία είναι τα

$$A=(x_A,y_A,z_A)$$
$$B=(x_B,y_B,z_B)$$
$$C=(x_C,y_C,z_C)$$

Από αυτά τα τρία σημεία περνά ένα επίπεδο. Ορίζουμε τα παρακάτω διανύσματα

$$\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$$
$$\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)=(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)$$

Ορίζουμε τις παρακάτω ευθείες

$$\bar{r}_1:\Re\to\Re^3:u\to\bar{r}_1(u)=(x_A,y_A,z_A)+u(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$$
$$\bar{r}_2:\Re\to\Re^3:v\to\bar{r}_1(v)=(x_A,y_A,z_A)+v(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)$$

ή

$$\bar{r}_1:\Re\to\Re^3:u\to\bar{r}_1(u)=(x_A,y_A,z_A)+u\bar{a}$$
$$\bar{r}_2:\Re\to\Re^3:v\to\bar{r}_2(v)=(x_A,y_A,z_A)+v\bar{b}$$

Οι δύο παραπάνω ευθείες τέμνονται στο σημείο A γιατί εάν θέσουμε u = v = 0 τότε

$$\bar{r}_1(0) = (x_A, y_A, z_A)$$
$$\bar{r}_2(0) = (x_A, y_A, z_A)$$

Οι δύο παραπάνω ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο. Θεωρούμε την παρακάτω οικογένεια διανυσμάτων

$$\{u\bar{a} + v\bar{b} = u(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) + v(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)\ ,\ u, v \in \Re\}$$

και το κάθετο διάνυσμα n από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων α και b. Τότε η παραπάνω οικογένεια ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν οι δύο τεμνόμενες ευθείες αφού

$$(u\bar{a} + v\bar{b}) \times \bar{a} = v(\bar{b} \times \bar{a}) = -v\bar{n}$$
$$(u\bar{a} + v\bar{b}) \times \bar{b} = u(\bar{a} \times \bar{b}) = u\bar{n}$$

Δηλαδή η παραπάνω οικογένεια διανυσμάτων έχει αρχή το σημείο A και όλα τα διανύσματα της κείνται πάνω στο ζητούμενο επίπεδο. Άρα η διανυσματική εξίσωση του ζητούμενου επιπέδου είναι

$$\bar{r} : \Re^2 \to \Re^3 : (u, v) \to \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (x_A, y_A, z_A) + u\bar{a} + v\bar{b}$$
$$= (x_A, y_A, z_A) + u(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) + v(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$$

Στην ίδια εξίσωση θα καταλήγαμε εάν ξεκινούσαμε από την υπόθεση με δοθείσα ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής, ή με δοθείσες δύο παράλληλες ευθείες. Θα βρούμε την εξίσωση ενός επιπέδου το οποίο περνά από τρία δοθέντα σημεία

$$A = (x_A, y_A, z_A)$$
$$B = (x_B, y_B, z_B)$$
$$C = (x_C, y_C, z_C)$$

Έστω (x, y, z) ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου που ψάχνουμε. Σχηματίζουμε τις διαφορές

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = \bar{a}$$
$$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = \bar{b}$$
$$(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = \bar{c}$$

Οι παραπάνω διαφορές μπορούν να θεωρηθούν και ως οι συντεταγμένες τριών διανυσμάτων $\bar{a}, \bar{b}$ και $\bar{c}$ τα οποία εφ' όσον ανήκουν στο επίπεδο που ψάχνουμε είναι συνεπίπεδα. Όμως από την θεωρία γνωρίζουμε ότι όταν τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα το μεικτό τους γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν άρα

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$$

Η παραπάνω εξίσωση για το επίπεδο που ψάχνουμε είναι αλγεβρικής μορφής. Η παραπάνω ορίζουσα μπορεί να προκύψει και από την ανάπτυξη της παρακάτω ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα και η παραπάνω ορίζουσα είναι και αυτή εξίσωση του επιπέδου που ψάχναμε.

Στην συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε εξίσωση ενός επιπέδου από την δομή του εσωτερικού γινομένου στον τρισδιάστατο χώρο.

Έστω ένα διάνυσμα

$$\bar{n}=(a_1,a_2,a_3)$$

το οποίο έχει ως αρχή ένα σημείο Α με συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A). Θεωρούμε και όλα τα σημεία του χώρου με συντεταγμένες (x, y, z) τέτοια ώστε

$$\langle \bar{n},(x-x_A,y-y_A,z-z_A)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a_1,a_2,a_3),(x-x_A,y-y_A,z-z_A)\rangle = 0$$

Η οικογένεια των διανυσμάτων με συντεταγμένες ($x - x_A$, $y - y_A$, $z - z_A$) είναι διανύσματα τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα $\bar{n}$. Άρα και οι φορείς των διανυσμάτων αυτών είναι κάθετοι στον φορέα του διανύσματος $\bar{n}$. Οι κάθετοι φορείς αυτοί τέμνονται όλοι στο σημείο Α άρα ορίζουν ένα επίπεδο. Επομένως η εξίσωση του επιπέδου που ψάχνουμε είναι η

$$\langle (a_1,a_2,a_3),(x-x_A,y-y_A,z-z_A)\rangle = 0 \Leftrightarrow a_1x+a_2y+a_3z+(-a_1x_A-a_2y_A-a_3z_A)=0$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση του επιπέδου που ψάχναμε είναι πάλι της μορφής $Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0$

Σχόλιο: Η διανυσματική εξίσωση ενός επιπέδου πχ η

$$\bar{r}:\Re^2 \to \Re^3 : (u,v) \to \bar{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=$$
$$=(x_A,y_A,z_A)+u(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)+v(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)$$

γράφεται σε παραμετρική μορφή

$$x(u,v) \equiv x = x_A + u(x_B - x_A) + v(x_C - x_A)$$
$$y(u,v) \equiv y = y_A + u(y_B - y_A) + v(y_C - y_A)$$
$$z(u,v) \equiv z = z_A + u(z_B - z_A) + v(z_C - z_A)$$

Έστω ένα επίπεδο με αλγεβρική εξίσωση Ax + By + Γz + Δ = 0 με τον συντελεστή Γ να είναι διάφορος του μηδενός. Τότε μπορούμε να εκφράσουμε την αλγεβρική εξίσωση του επιπέδου ως

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{Ax + By + \Delta}{\Gamma}, \ \Gamma \neq 0$$

<u>Χρήσιμο τυπολόγιο</u>

Είδαμε ότι όταν έχουμε ως δεδομένο ένα κάθετο διάνυσμα (α_1, α_2, α_3) σε ένα επίπεδο τότε η εξίσωση του επιπέδου γράφεται σαν

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + (-a_1 x_A - a_2 y_A - a_3 z_A) = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι εάν η εξίσωση του επιπέδου δίδεται σαν Ax + By + Γz + Δ = 0 τότε ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο έχει συντεταγμένες (Α, Β, Γ). Επομένως και κάθε διάνυσμα (A_1, B_1, Γ_1) = λ(Α, Β, Γ), (λ πραγματικός αριθμός) είναι κάθετο στο επίπεδο. *Άρα ένα διάνυσμα (α, b, c) είναι κάθετο στο επίπεδο αν ισχύει ότι*

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{\Gamma} = \lambda$$

Εάν το διάνυσμα (α, b, c) είναι κάθετο σε ένα επίπεδο με εξίσωση Ax+By+Γz+Δ=0 τότε κάθε διάνυσμα (α_1, b_1, c_1) που είναι κάθετο στο (α, b, c) είτε ανήκει στο επίπεδο είτε είναι παράλληλο στο επίπεδο. *Άρα ένα διάνυσμα (α_1, b_1, c_1) είναι παράλληλο στο δοθέν επίπεδο ή είναι πάνω στο επίπεδο εάν ισχύει ότι*

$$\langle (a_1, b_1, c_1), (A, B, \Gamma) \rangle = 0 \Rightarrow a_1 A + b_1 B + c_1 \Gamma = 0$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

Δύο επίπεδα με εξισώσεις

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$$

είναι παράλληλα εάν ισχύει ότι

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \lambda \ , \ \lambda \in \Re$$

ταυτίζονται εάν ισχύει ότι

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \lambda \ , \ \lambda \in \Re$$

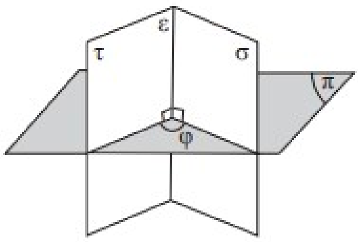
και είναι κάθετα εάν ισχύει ότι

$$A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2 = 0$$

Έστω δύο επίπεδα τ και σ με εξισώσεις

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$$

Έστω ότι τα δύο αυτά επίπεδα τέμνονται κατά μήκος μια ευθείας ε.

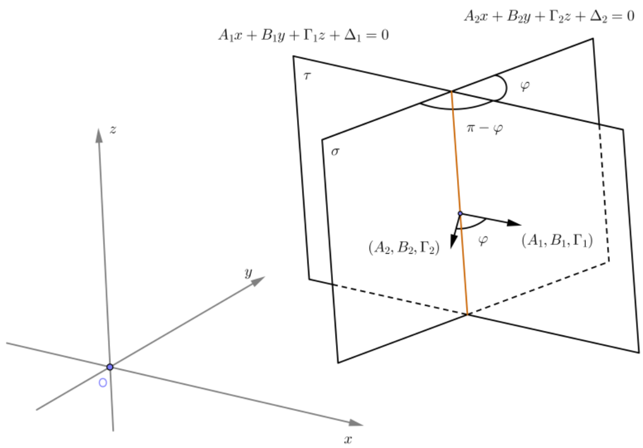


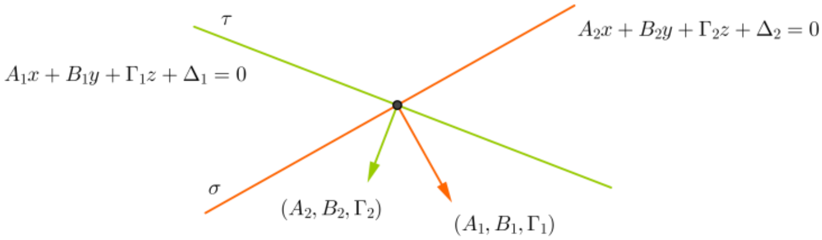
Θεωρούμε και ένα επίπεδο π το οποίο τέμνει κάθετα τα δύο επίπεδα. Έχουμε τους παρακάτω ορισμούς

Ονομάζουμε δίεδρη γωνία με ακμή ε και έδρες τα ημιεπίπεδα τ και σ που φαίνονται στο σχήμα το σύνολο των σημείων που βρίσκονται στα ημιεπίπεδα τ και σ αντίστοιχα.

Ονομάζουμε γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων τ και σ την γωνία μεταξύ των δύο καθέτων διανυσμάτων τους και ισούται με

$$\phi = \tau o\xi \sigma \upsilon \nu \left(\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}} \right)$$





Γωνία μεταξύ ευθείας και ενός επιπέδου. Έστω μια ευθεία ε με διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma) + t(x_N - x_\Sigma, y_N - y_\Sigma, z_N - z_\Sigma)$$

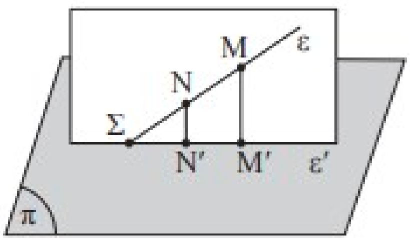
και ένα επίπεδο Π με εξίσωση Ax + By + Γz + Δ = 0. Είδαμε ότι το διάνυσμα με συντεταγμένες (Α, Β, Γ) είναι κάθετο στο επίπεδο. Η γωνία μεταξύ της ευθείας ε και του διανύσματος (Α, Β, Γ) ισούται με

$$\omega = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\langle (A, B, \Gamma), (x_N - x_\Sigma, y_N - y_\Sigma, z_N - z_\Sigma)\rangle}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}\sqrt{(x_N - x_\Sigma)^2 + (y_N - y_\Sigma)^2 + (z_N - z_\Sigma)^2}}\right)$$

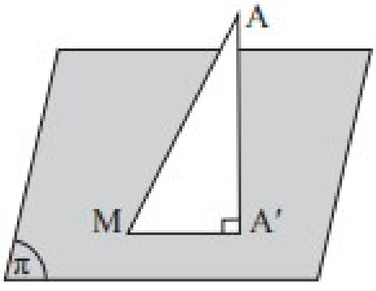
Ορίζουμε ως γωνία θ μεταξύ της ευθείας ε και του επιπέδου Π το μέγεθος

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$$

Άρα εάν ω = 0 τότε η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο Π.



Ορίζουμε ως κάθετη ή ορθή προβολή ενός σημείου Α του χώρου στο επίπεδο Π το σημείο Α΄ που προκύπτει ως η τομή μεταξύ του επιπέδου Π και της κάθετης ευθείας στο επίπεδο Π που διέρχεται από το σημείο Α.



Μια ευθεία ε ονομάζεται παράλληλη ως προς ένα επίπεδο εάν δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το επίπεδο.

Απόσταση σημείου από επίπεδο

Έστω ένα σημείο Μ με συντεταγμένες (x_M, y_M, z_M) και ένα επίπεδο Π με εξίσωση Ax+By+Γz+Δ=0. Η απόσταση του σημείου Μ από το επίπεδο ισούται με

$$d(M,\Pi)=\frac{\left|Ax_M+By_M+\Gamma z_M+\Delta\right|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

Σχόλιο: Οι συντεταγμένες του σημείου Μ΄ που είναι η ορθή προβολή του σημείου Μ στο επίπεδο Π δίδονται από την παρακάτω σχέση

$$(x_{M'},y_{M'},z_{M'})=(x_M,y_M,z_M)+t_0\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}(A,B,\Gamma)\ ,t_0=-\frac{Ax_M+By_M+\Gamma z_M+\Delta}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

Πράγματι έστω Μ το σημείο που ζητούμε την προβολή του στο επίπεδο με εξίσωση Ax+By+Γz+Δ = 0 και Μ΄ η προβολή του σημείου Μ πάνω στο επίπεδο αυτό. Έστω ε η κάθετη ευθεία στο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Μ. Τότε η εξίσωση της ευθείας είναι

$$\bar{r}(t)=(x_M,y_M,z_M)+t(A,B,\Gamma)$$

Αφού το σημείο Μ΄ ανήκει και στο επίπεδο και στην κάθετη ευθεία υπάρχει τιμή της παραμέτρου t τέτοια ώστε

$$(x_{M'},y_{M'},z_{M'})=(x_M,y_M,z_M)+t_0(A,B,\Gamma)=(x_M+t_0A,y_M+t_0B,z_M+t_0\Gamma)$$

Όμως όπως είπαμε πριν το σημείο Μ΄ είναι και σημείο του επιπέδου άρα θα ισχύει ότι

$$Ax_{M'}+By_{M'}+\Gamma z_{M'}+\Delta=0\Rightarrow A(x_M+t_0A)+B(y_M+t_0B)+\Gamma(z_M+t_0\Gamma)+\Delta=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax_M+By_M+\Gamma z_M+t_0(A^2+B^2+\Gamma^2)+\Delta=0\Rightarrow t_0=-\frac{Ax_M+By_M+\Gamma z_M+\Delta}{A^2+B^2+\Gamma^2}$$

Άρα

$$\begin{aligned}(x_{M'},y_{M'},z_{M'})&=(x_M,y_M,z_M)+t_0(A,B,\Gamma)=\\&=(x_M,y_M,z_M)+\left(-\frac{Ax_M+By_M+\Gamma z_M+\Delta}{A^2+B^2+\Gamma^2}\right)(A,B,\Gamma)=\\&=(x_M,y_M,z_M)+\left(-\frac{Ax_M+By_M+\Gamma z_M+\Delta}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}(A,B,\Gamma)\end{aligned}$$

Ο αντίστοιχος τύπος για την προβολή σημείου πάνω σε μια ευθεία ε ήταν

$$t_0 = -\frac{ax_A + by_A + cz_A - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Σχόλιο: Εάν θέλουμε την προβολή μιας ευθείας πάνω στο επίπεδο τότε επιλέγουμε δύο αυθαίρετα σημεία Μ και Ν πάνω στην ευθεία και βρίσκουμε τις προβολές τους Μ΄ και Ν΄ πάνω στο επίπεδο σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο. Έτσι η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x_{M'}, y_{M'}, z_{M'}) + t(x_{M'} - x_{N'}, y_{M'} - y_{N'}, z_{M'} - z_{N'})$$

Απόσταση μεταξύ δύο παραλλήλων επιπέδων

Έστω δύο παράλληλα επίπεδα Π_1, Π_2 με εξισώσεις $A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$ και $A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$. Για να βρούμε την απόσταση μεταξύ τους επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο Ε πάνω στο πρώτο επίπεδο. Μπορούμε να επιλέξουμε το σημείο αυτό να είναι πάνω στον άξονα z οπότε οι συντεταγμένες του θα είναι $(0, 0, -\Delta_1/\Gamma_1)$. Η απόσταση μεταξύ των δύο επιπέδων βρίσκεται εφαρμόζοντας την σχέση απόστασης σημείου από επίπεδο και ισούται με

$$d(\mathrm{E}, \Pi_2) = d(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{\left| -\Gamma_2 \frac{\Delta_1}{\Gamma_1} + \Delta_2 \right|}{\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + \Gamma_2^{\,2}}} = \frac{1}{|\Gamma_1| \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + \Gamma_2^{\,2}}} \left\| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Delta_1 \\ \Gamma_2 & \Delta_2 \end{matrix} \right\|$$

……………………….