Μάθημα 2ο

Γεωμετρικά μεγέθη, δομές και γινόμενα

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είτε με τον κανόνα και τον διαβήτη είτε μέσω αλγεβρικών σχέσεων μπορούμε να υπολογίζουμε μήκη ευθυγράμμων τμημάτων και γωνίες. Επί πλέον μπορούμε να υπολογίζουμε μεγέθη όπως περίμετρο, εμβαδό επίπεδων σχημάτων ή όγκους στερεών (κύβοι, παραλληλεπίπεδα κλπ).

Ο υπολογισμός της περιμέτρου, εμβαδού και όγκου γινόταν μεν με αλγεβρικές σχέσεις αλλά δεν γινόταν χρήση της έννοιας των συντεταγμένων.

Θέλοντας να συνεχίσουμε να κάνουμε υπολογισμούς στον τρισδιάστατο χώρο είναι ανάγκη να ορίσουμε κάποιες αλγεβρικές σχέσεις με τις οποίες θα μπορούμε να υπολογίζουμε γωνίες και μήκη, εμβαδά κλπ με μια διαφορά. Οι σχέσεις που θα ορίσουμε για τον υπολογισμό των παραπάνω μεγεθών θα περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ή των διανυσμάτων που έχουν σχέση με το γεωμετρικό αντικείμενο που μελετάμε.

Με τον τρόπο αυτό ο τρισδιάστατος χώρος εμπλουτίζεται με επί πλέον δομές οι οποίες μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε παραπάνω πράγματα από αυτά που μπορούμε μόνο από την δομή του διανυσματικού χώρου.

Α) Απόσταση

Αν Α = (x_1, y_1, z_1), Β = (x_2, y_2, z_2) δύο σημεία του τρισδιάστατου χώρου τότε η απόσταση μεταξύ τους ορίζεται ως

$$d:\Re^3\times\Re^3\to\Re_+:(A,B)\to d(A,B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \tag{2.1}$$

Β) Νόρμα

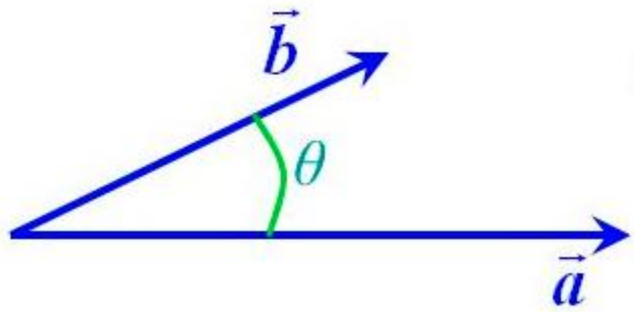
$$\|\ \|:\Re^3\to\Re_+:\overline{OA}=(x_1,y_1,z_1)\to\left\|\overline{OA}\right\|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \tag{2.2}$$

Γ) Εσωτερικό Γινόμενο

$$\begin{gathered}\langle\ ,\ \rangle:\Re^3\times\Re^3\to\Re:(\overline{a},\overline{b})\to\langle\overline{a},\overline{b}\rangle=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\|\overline{a}\|\|\overline{b}\|\sigma\upsilon\nu\phi\\ \overline{a}=(a_1,a_2,a_3)\\ \overline{b}=(b_1,b_2,b_3)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Μέσω του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να μετράμε γωνία μεταξύ διανυσμάτων - άρα και μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων - δηλαδή

$$\theta = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}\right) \tag{2.4}$$

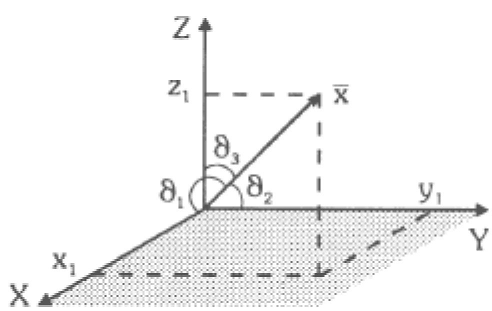


Έστω ένα διάνυσμα με Καρτεσιανές συντεταγμένες

$\bar{x} = (x_1, y_1, z_1)$

Ορίζουμε ως *συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος* $\bar{x}$ *τα μεγέθη*

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \frac{\langle \bar{x}, \bar{e}_1 \rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{e}_1\|} = \frac{\langle (x_1, y_1, z_1), (1,0,0) \rangle}{\|\bar{x}\|\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{x_1}{\|\bar{x}\|} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{\langle \bar{x}, \bar{e}_2 \rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{e}_2\|} = \frac{y_1}{\|\bar{x}\|} \; , \; \sigma\upsilon\nu\theta_3 = \frac{\langle \bar{x}, \bar{e}_3 \rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{e}_3\|} = \frac{z_1}{\|\bar{x}\|}$$



Ισχύει η παρακάτω ταυτότητα

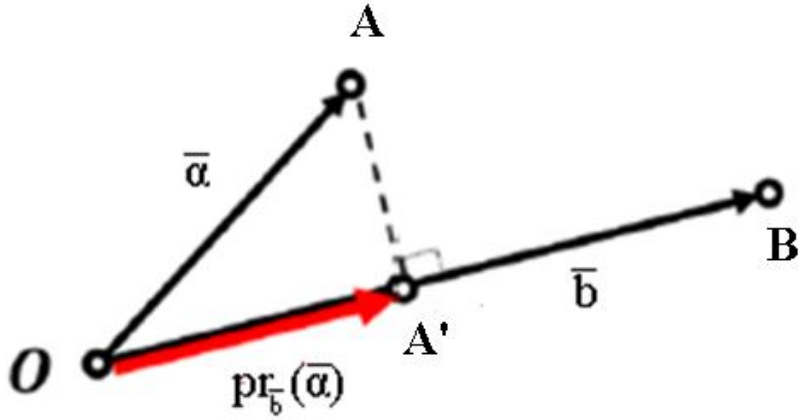
$$\sigma\upsilon\nu^2\theta_1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta_2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta_3 = \frac{x_1^{\,2}}{\|\bar{x}\|^2} + \frac{y_1^{\,2}}{\|\bar{x}\|^2} + \frac{z_1^{\,2}}{\|\bar{x}\|^2} = 1$$

Έστω τώρα τα διανύσματα

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \ , \ \bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \ , \ \bar{b}_u = \frac{1}{\sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}}(b_1, b_2, b_3)$$

Ορίζουμε ως ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\bar{a}$ *πάνω στο διάνυσμα b την παράσταση*

$$pr_{\bar{b}}(\bar{a}) = \langle \bar{a}, \frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|} \rangle \frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|} = \langle \bar{a}, \bar{b}_u \rangle \bar{b}_u = (\|\bar{a}\| \|\bar{b}_u\| \sigma\upsilon\nu\theta)\bar{b}_u = (\|\bar{a}\| \sigma\upsilon\nu\theta)\bar{b}_u$$



Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

α) Διπροσθετικό

$$\begin{aligned} \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \Re^3 \ \langle \bar{a} + \bar{b}, \bar{c} \rangle &= \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \\ \langle \bar{a}, \bar{b} + \bar{c} \rangle &= \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \end{aligned} \tag{2.5}$$

β) Γραμμικό

$$\forall \lambda \in \Re, \forall \bar{a}, \bar{b} \in \Re^3 \ \langle \lambda \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{a}, \lambda \bar{b} \rangle = \lambda \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \tag{2.6}$$

γ) Αντιμεταθετικό

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \Re^3 \ \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle \tag{2.7}$$

δ) Θετικώς ορισμένο

$$\forall \bar{a} \in \Re^3 \ \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle > 0 \ \ \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = (0,0,0) \tag{2.8}$$

Παρατήρηση: Στο εσωτερικό γινόμενο δεν ισχύει ο κανόνας της διαγραφής όπως στον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \Rightarrow \bar{b} = \bar{c}$ ΟΧΙ!

Σχόλιο: Εάν το διάνυσμα $\bar{b}$ θεωρηθεί ως η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα μάζας m και $\bar{a}$ η διεύθυνση της ευθείας διαδρομής του σώματος m στην οποία κινείται για κάποιο χρόνο t τότε το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων είναι το έργο της δύναμης $\bar{b}$ κατά την ευθεία διαδρομή του σώματος μήκους όσο το μέτρο του διανύσματος $\bar{a}$.

Δ) Εξωτερικό Γινόμενο

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται σαν

$$\times : \Re^3 \times \Re^3 \to \Re^3 : (\bar{a}, \bar{b}) \to (\bar{a} \times \bar{b}) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

$$(a_2 b_3 - b_2 a_3) e_1 + (-a_1 b_3 + b_1 a_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 = (a_2 b_3 - b_2 a_3, -a_1 b_3 + b_1 a_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Το διάνυσμα $\bar{a} \times \bar{b}$ είναι τέτοιο ώστε να είναι κάθετο στα διανύσματα $\bar{a}$ και $\bar{b}$ και οι (προσανατολισμένοι) φορείς τους να αποτελούν ένα δεξιόστροφο σύστημα αξόνων. Το δε μέτρο του ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές a και b δηλαδή έχουμε και την σχέση

$$\left\| \bar{a} \times \bar{b} \right\| = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \eta\mu\phi \tag{2.10}$$

όπου φ η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων a και b.
Επίσης το εμβαδόν του τριγώνου με πλευρές a, b και γωνία μεταξύ τους φ ισούται με

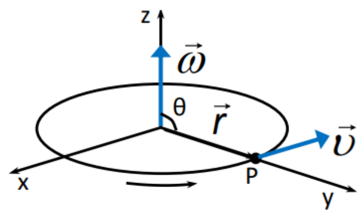
$$E_{tr} = \frac{1}{2} \left\| \bar{a} \times \bar{b} \right\| = \frac{1}{2} \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \eta\mu\phi \tag{2.11}$$

Σχόλιο: Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων a και b μπορεί να γραφτεί και σαν

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

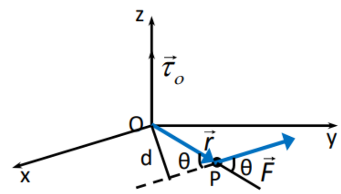
Φυσική ερμηνεία

ι) Εάν ένα σώμα μάζας m εκτελεί κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας r. Έστω $\bar{\varpi}$ το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας. Τότε το διάνυσμα της ταχύτητας του σώματος $\bar{v}$ είναι ένα διάνυσμα που υπολογίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\bar{\varpi}$ και $\bar{r}$

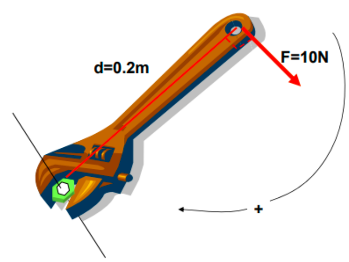


$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

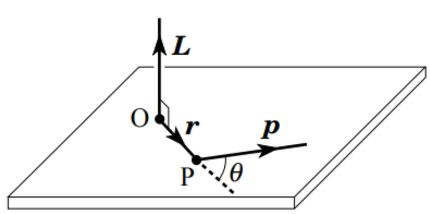
ιι) Η ροπή $\bar{\tau}_0$ μιας δύναμης $\bar{F}$ σε ένα σώμα μάζας m



$$\bar{\tau}_0 = \bar{r} \times \bar{F}$$



ιιι) Στροφορμή (Angular momentum) σωμάτιου μάζας m

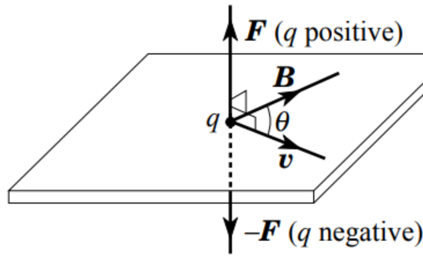


$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times (m\bar{v})$$

ιν) Δύναμη Lorentz

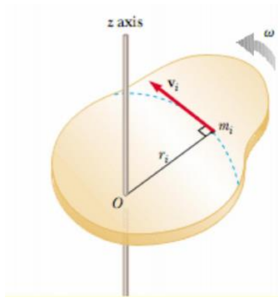
Ένα σωματίδιο με ηλεκτρικό φορτίο q κινείται με ταχύτητα $\bar{v}$ μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο μαγνητικής έντασης $\bar{B}$ τότε η μαγνητική δύναμη που ασκείται στο φορτίο q ισούται με

$\bar{F} = q(\bar{v} \times \bar{B})$ όπου το διάνυσμα $\bar{B}$ είναι το διάνυσμα της μαγνητικής έντασης



ν) Κατανομή ταχυτήτων σε περιστρεφόμενο στερεό

Έστω ένα στερεό σώμα μάζας Μ το οποίο εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από ένα σταθερό άξονα.



Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας κάθε σημείου του στερεού σώματος Μ είναι συνάρτηση των Καρτεσιανών συντεταγμένων των σημείων του στερεού. Το ίδιο ισχύει και για το διάνυσμα θέσης r του κάθε σημείου από την αρχή του συστήματος Ο δηλαδή

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}(x,y,z) = (\omega_1(x,y,z), \omega_2(x,y,z), \omega_3(x,y,z))$$
$$\overline{r} = \overline{r}(x,y,z) = (r_1(x,y,z), r_2(x,y,z), r_3(x,y,z))$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας v κάθε σημείου του στερεού είναι και αυτό συνάρτηση των Καρτεσιανών συντεταγμένων των σημείων του στερεού και ισχύει ότι

$$\overline{v}(x,y,z) = (\overline{\omega} \times \overline{r})(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας 3 x 3 ονομάζεται και *τελεστής γωνιακής ταχύτητας*.

Ιδιότητες

α) $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \Re^3 \; (\overline{a} \times \overline{b}) = -(\overline{b} \times \overline{a})$ (2.13)

β) $\overline{a} \times \overline{b} = (0,0,0) \Leftrightarrow \overline{a} \,//\, \overline{b}$ (2.14) γ) $\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \Re^3 \, (\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = (\bar{a}\times\bar{c}) + (\bar{b}\times\bar{c})$ (2.15)

δ) $\forall \bar{a},\bar{b} \in \Re^3, \lambda \in \Re \lambda\,(\bar{a}\times\bar{b}) = ((\lambda\bar{a})\times\bar{b}) = (\bar{a}\times(\lambda\bar{b}))$ (2.16)

ε) $$\begin{aligned} &\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \Re^3 \, (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = \langle\bar{a},\bar{c}\rangle\bar{b} - \langle\bar{c},\bar{b}\rangle\bar{a} \\ &\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \Re^3 \, \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \langle\bar{a},\bar{c}\rangle\bar{b} - \langle\bar{a},\bar{b}\rangle\bar{c} \end{aligned} \quad (2.17)$$

στ) $\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d} \in \Re^3 \, \langle(\bar{a}\times\bar{b}),(\bar{c}\times\bar{d})\rangle = \langle\bar{a},\bar{c}\rangle\langle\bar{b},\bar{d}\rangle - \langle\bar{b},\bar{c}\rangle\langle\bar{a},\bar{d}\rangle$ (2.18)

Ε) Μεικτό γινόμενο

Ορίζεται σαν

$$[\ ,\ ,\ ]:\Re^3\times\Re^3\times\Re^3 \to \Re:(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) \to [\bar{a},\bar{b},\bar{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Το μεικτό γινόμενο είναι θετικό όταν τα διανύσματα αποτελούν μια δεξιόστροφη τριάδα, αρνητικό όταν αποτελούν μια αριστερόστροφη τριάδα, και ίσο με το μηδέν όταν είναι συνεπίπεδα.

Σχόλιο: Η εύρεση προσανατολισμού δύο διανυσμάτων α = (α_1, α_2) και b = (b_1, b_2) στο επίπεδο γίνεται με τον παρακάτω τρόπο

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0 \ \text{δεξιόστροφο ζεύγος}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} < 0 \ \text{αριστερόστροφο ζεύγος}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \ \text{γραμμικώς εξαρτημένα}$$

Ιδιότητες

α) Τριπροσθετικό

$$\begin{aligned} \forall \bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d} \in \Re^3 \Rightarrow & [\bar{a}+\bar{d},\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{b},\bar{c}] + [\bar{d},\bar{b},\bar{c}] \\ & [\bar{a},\bar{b}+\bar{d},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{b},\bar{c}] + [\bar{a},\bar{d},\bar{c}] \\ & [\bar{a},\bar{b},\bar{c}+\bar{d}] = [\bar{a},\bar{b},\bar{c}] + [\bar{a},\bar{b},\bar{d}] \end{aligned}$$

β) Αντισυμμετρικό

$$\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c},\in \Re^3 \Rightarrow [\bar{a},\bar{b},\bar{c}] = -[\bar{b},\bar{a},\bar{c}] = [\bar{b},\bar{c},\bar{a}]$$

γ) Τριγραμμικό

$$\forall \lambda \in \Re, \forall \bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \Re^3 \Rightarrow [\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\lambda\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{b},\lambda\bar{c}] = \lambda[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]$$

δ) Ταυτότητα

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{d}]\bar{c} - [\bar{a},\bar{b},\bar{c}]\bar{d} = (\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})$$

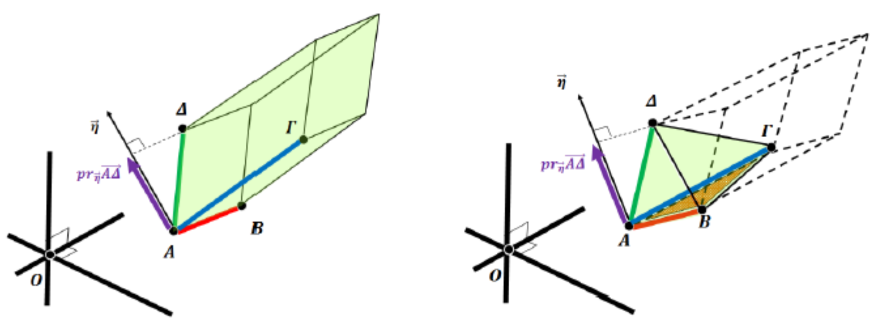
ε)

$$\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{e},\bar{f} \in \Re^3 \Rightarrow [\bar{a},\bar{b},\bar{c}][\bar{d},\bar{e},\bar{f}] = \det\left[\begin{bmatrix}\bar{a}\\ \bar{b}\\ \bar{c}\end{bmatrix}[\bar{d},\bar{e},\bar{f}]\right] =$$

$$= \det\begin{bmatrix}\langle\bar{a},\bar{d}\rangle & \langle\bar{a},\bar{e}\rangle & \langle\bar{a},\bar{f}\rangle\\ \langle\bar{b},\bar{d}\rangle & \langle\bar{b},\bar{e}\rangle & \langle\bar{b},\bar{f}\rangle\\ \langle\bar{c},\bar{d}\rangle & \langle\bar{c},\bar{e}\rangle & \langle\bar{c},\bar{f}\rangle\end{bmatrix}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Η απόλυτη τιμή του μεικτού γινομένου τριών διανυσμάτων a, b, και c είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές όσο το μέτρο των διανυσμάτων a, b, και c.
Επίσης ο όγκος του τετράεδρου με τις ίδιες ακμές ισούται με το 1 / 6 της απόλυτης τιμής του μεικτού γινομένου των τριών αυτών διανυσμάτων



Γεωμετρική αναπαράσταση πράξεων

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού που ορίζονται στον διανυσματικό χώρο R^3 δέχονται γεωμετρικής αναπαράστασης. Σαν γενική περίπτωση θεωρούμε δύο διανύσματα

$$\bar{a} = (a_1,a_2,a_3)\ \ ,\ \ \bar{b} = (b_1,b_2,b_3)$$

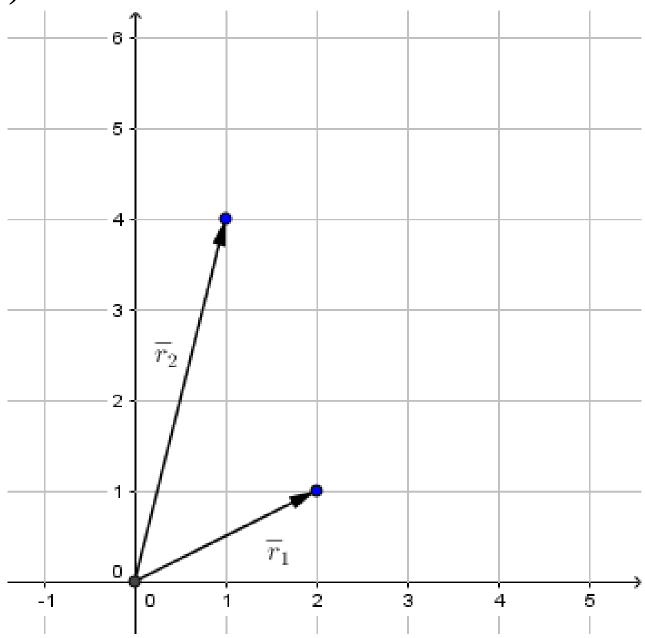
Τα διανύσματα αυτά μπορούν να προστεθούν και το άθροισμα τους είναι

$$\bar{a}+\bar{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

Θέλουμε να δούμε το διάνυσμα που είναι το άθροισμα τους όχι μόνο ποια είναι η θέση του στο χώρο αλλά να δούμε και ποια είναι η σχέση του με τα αρχικά διανύσματα. Για να γίνει πιο εύκολα κατανοητό ας απλοποιήσουμε λίγο το πρόβλημά μας και ας θεωρήσουμε μια ανάλογη περίπτωση στο (συντεταγμένο) επίπεδο xy.

Έστω δύο διανύσματα του επιπέδου αυτού

$$\bar{r}_1=(2,1,0) \quad , \quad \bar{r}_2=(1,4,0)$$



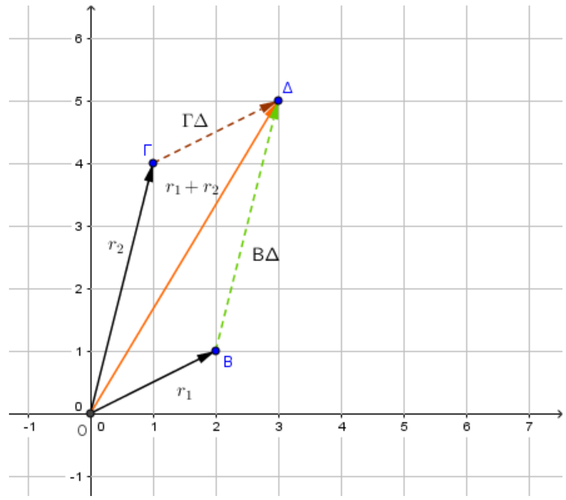
Το άθροισμα των δύο διανυσμάτων είναι

$$\bar{r}_1+\bar{r}_2=(2,1,0)+(1,4,0)=(2+1,1+4,0+0)=(3,5,0)$$

Ας υπολογίσουμε τα παρακάτω διανύσματα

$$\overline{\mathrm{B}\Delta}=(3,5,0)-(2,1,0)=(1,4,0)$$
$$\overline{\Gamma\Delta}=(3,5,0)-(1,4,0)=(2,1,0)$$

Τα διανύσματα αυτά τα έχουμε με πράσινο και καφέ χρώμα αντίστοιχα



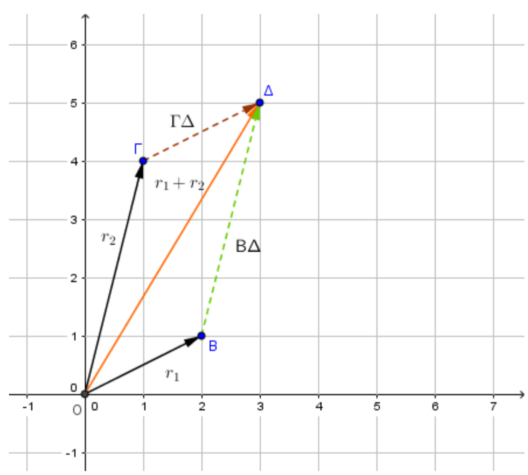
Παρατηρούμε ότι έχουμε τα παρακάτω ζεύγη παραλλήλως μετατοπισμένων διανυσμάτων

$\left(\overline{\Gamma\Delta}, \bar{r}_1\right)$, $\left(\overline{\mathrm{B}\Delta}, \bar{r}_2\right)$

$\overline{\Gamma\Delta} = \bar{r}_1 = (2{,}1{,}0)$

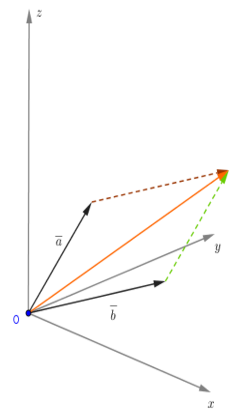
$\overline{\mathrm{B}\Delta} = \bar{r}_2 = (1{,}4{,}0)$

Ας δούμε το παραπάνω σχήμα ως καθαρά γεωμετρικό.



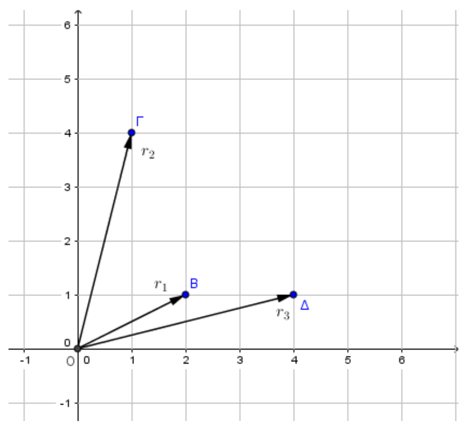
Από την πρώτη ματιά παρατηρούμε ότι το σχήμα ΟΑΒΓ είναι ένα τετράπλευρο. Όμως η ισότητα των παραπάνω ζευγών διανυσμάτων μας λέει ότι οι πλευρές ΟΑ και ΒΓ είναι παράλληλες και ίσες και οι πλευρές ΑΓ και ΟΓ είναι παράλληλες και ίσες.
Αυτό σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΟΑΒΓ είναι παραλληλόγραμμο συνεπώς το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου.

Η παραπάνω διαδικασία πρόσθεσης δύο διανυσμάτων ονομάζεται *κανόνας του παραλληλογράμμου.*

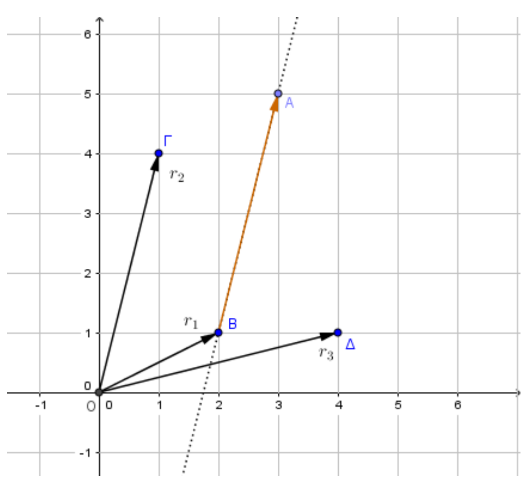


Εάν έχουμε n το πλήθος διανύσματα και θέλουμε να τα προσθέσουμε τότε τα κάνουμε διαδοχικά και το άθροισμα τους είναι το διάνυσμα το οποίο έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα όπου θα προσθέσουμε τρία διανύσματα στο επίπεδο. Έστω

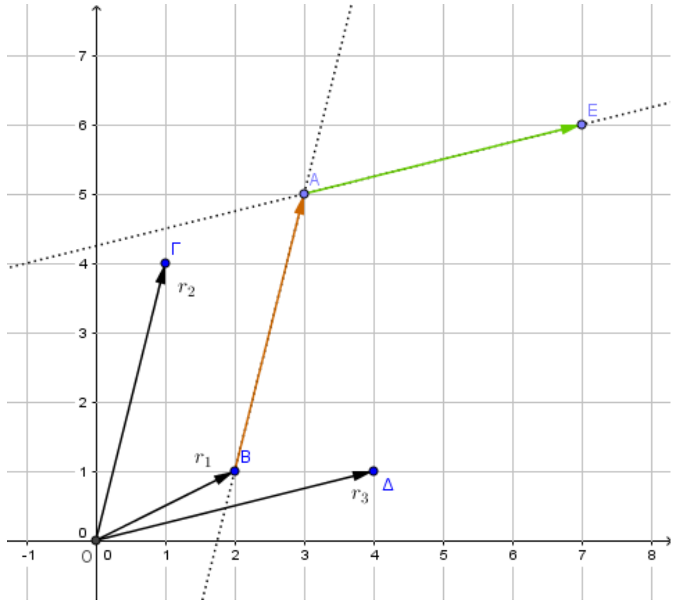
$\bar{r}_1 = (2,1,0)$, $\bar{r}_2 = (1,4,0)$, $\bar{r}_3 = (4,1,0)$



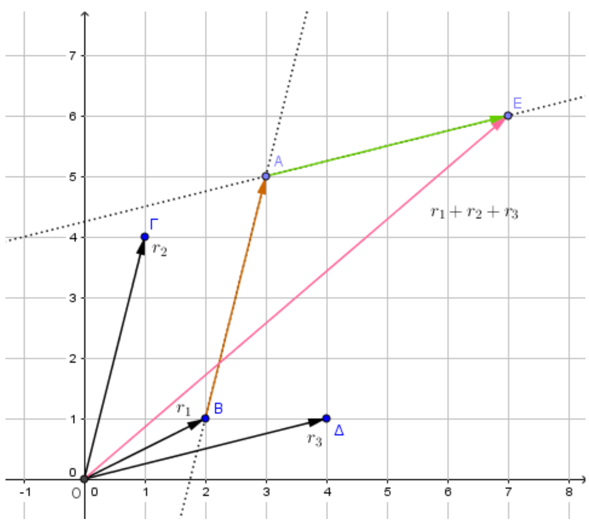
Σχεδιάζουμε παράλληλη ευθεία προς το διάνυσμα r_2 η οποία διέρχεται από το σημείο B και σχεδιάζουμε ένα διάνυσμα το οποίο είναι ίσο με το διάνυσμα r_2 με αρχή το σημείο B.



Σχεδιάζουμε παράλληλη ευθεία προς το διάνυσμα r_3 η οποία διέρχεται από το σημείο Α και σχεδιάζουμε ένα διάνυσμα το οποίο είναι ίσο με το διάνυσμα r_3 με αρχή το σημείο Α.



Το διάνυσμα που είναι αντιστοιχεί στο άθροισμα των διανυσμάτων r_1, r_2 και r_3 είναι το διάνυσμα που έχει αρχή το σημείο Ο και πέρας το σημείο Ε.



Στην συνέχεια θέλουμε να δούμε την σχέση μεταξύ δύο διανυσμάτων α και b με το διάνυσμα που ισούται με την διαφορά αυτών των δύο.

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad , \quad \bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

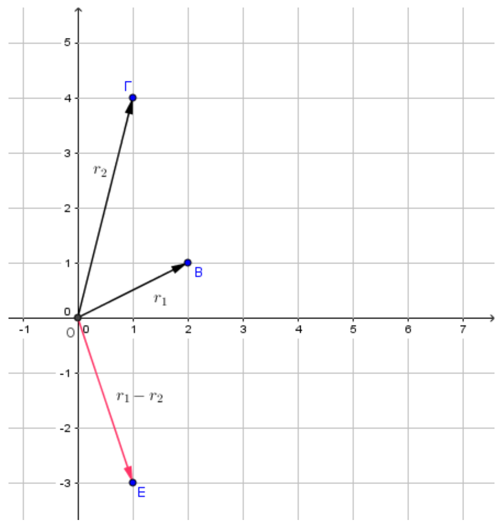
$$\bar{b} - \bar{a} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Θα κάνουμε όπως και πριν ένα παράδειγμα στο επίπεδο. Έστω δύο διανύσματα του επιπέδου xy

$\bar{r}_1 = (2{,}1{,}0) \quad , \quad \bar{r}_2 = (1{,}4{,}0)$

Τότε

$\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = (2{,}1{,}0) - (1{,}4{,}0) = (1,-3{,}0)$

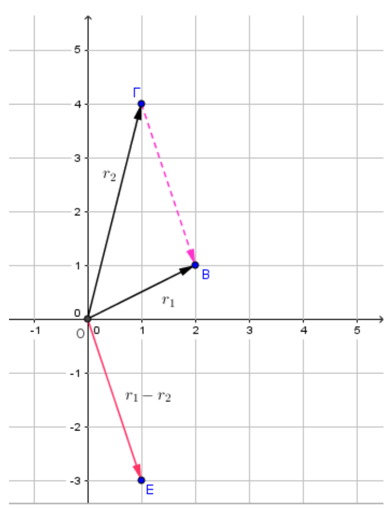


Ας υπολογίσουμε και το διάνυσμα ΓΒ. Είναι

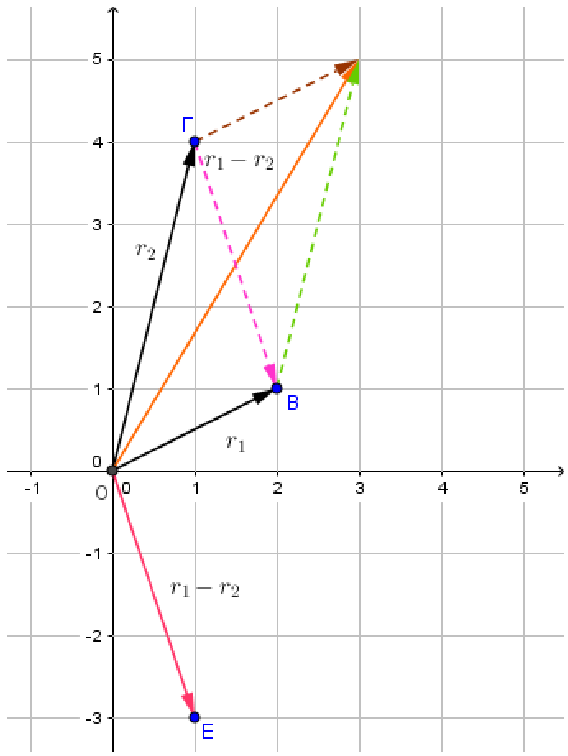
$\overline{\Gamma\mathrm{B}} = (2{,}1{,}0) - (1{,}4{,}0) = (1,-3{,}0)$

Παρατηρούμε ότι

$\overline{\Gamma\mathrm{B}} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$

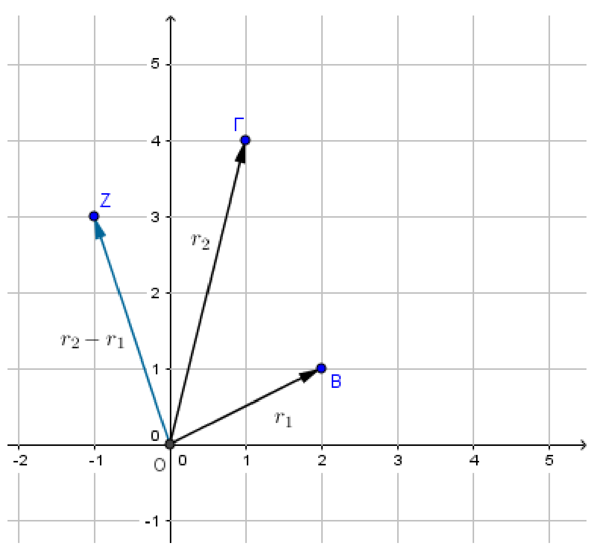


Δηλαδή η διαφορά των δύο διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα το οποίο είτε μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν ένα διάνυσμα με αρχή το κέντρο του συστήματος των δύο αξόνων x και y είτε ένα διάνυσμα το οποίο να είναι η δεύτερη διαγώνιος του παραλληλογράμμου που σχεδιάσαμε όταν προσθέταμε τα διανύσματα



Εάν θέλουμε να δούμε την διαφορά $r_2 - r_1$ τότε το σχήμα γίνεται

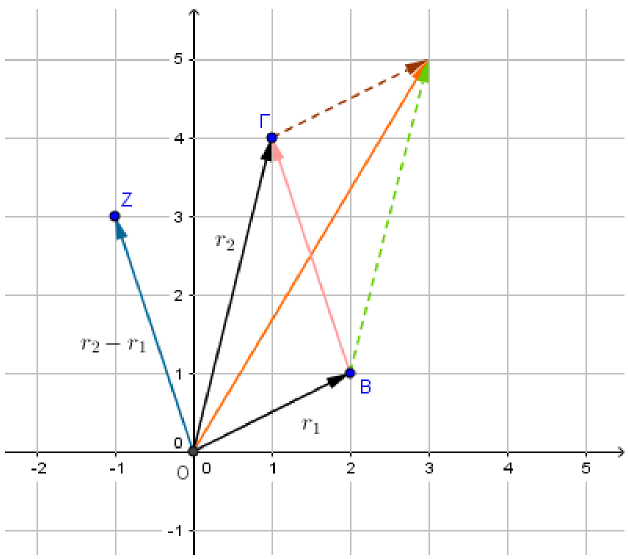
$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (1,4,0) - (2,1,0) = (-1,3,0)$$



Όπως και πριν υπολογίζουμε το διάνυσμα ΒΓ

$$\overline{\mathrm{B\Gamma}} = (1,4,0) - (2,1,0) = (-1,3,0) = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$$

Δηλαδή το διάνυσμα που είναι η διαφορά $r_2 - r_1$ είναι ένα διάνυσμα που βρίσκεται στην δεύτερη διαγώνιο του παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ με αρχή το σημείο Β και πέρας το σημείο Γ.



Εάν θέλουμε να αφαιρέσουμε n-1 το πλήθος διανύσματα r_2, r_3,…, r_n από ένα διάνυσμα r_1 τότε κάνουμε διαδοχικά τα r_1, $-r_2$, $-r_3$, $-r_4$, …, $-r_n$ και βρίσκουμε το άθροισμα τους όπως περιγράψαμε προηγουμένως.

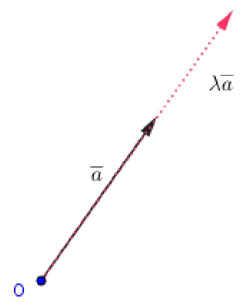
Για τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό (πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με διάνυσμα) έχουμε ότι αν

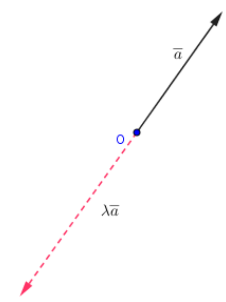
$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

και λ ένας θετικός πραγματικός αριθμός τότε

$$\lambda\bar{a} = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

Το διάνυσμα που προκύπτει είναι ένα διάνυσμα όπου οι συνιστώσες του είναι πολλαπλάσιες του αρχικού διανύσματος. Επειδή ο πραγματικός αριθμός λ είναι θετικός το διάνυσμα που προκύπτει είναι ένα διάνυσμα με ίδια διεύθυνση, ίδια φορά και μέτρο λ φορές το μέτρο του αρχικού. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το αρχικό διάνυσμα και το διάνυσμα που προκύπτει είναι *ομόρροπα.* Στην περίπτωση όπου το λ είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός τότε το διάνυσμα που προκύπτει είναι ένα διάνυσμα με ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και μέτρο $|\lambda|$ φορές το μέτρο του αρχικού διανύσματος. Στην περίπτωση αυτή τα δύο διανύσματα είναι *αντίρροπα.*





Ευθεία στο επίπεδο και στο χώρο

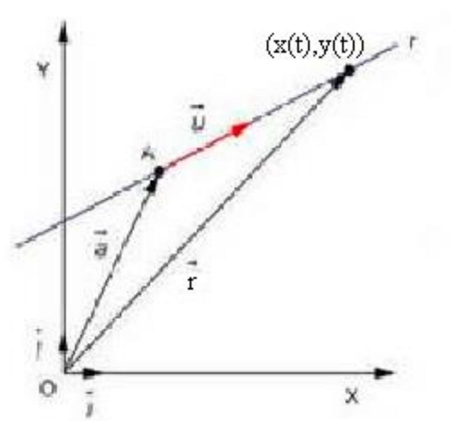
Πάνω στο επίπεδο επιλέγουμε ένα σημείο Ο και με κέντρο το σημείο αυτό ορίζουμε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y). Θέλουμε να βρούμε μια εξίσωση που να περιγράφει μια ευθεία στο επίπεδο. Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι από δύο σημεία περνά μια και μόνο μια ευθεία.
Έστω δύο τυχαία σημεία Α και Β του επιπέδου με συντεταγμένες (x_A, y_A) και (x_B,y_B) και το διάνυσμα

$$\bar{u} = (a_1, a_2) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\bar{r} : \Re \to \Re^2 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t)) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)) = (x_A, y_A) + t\bar{u}$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω διανυσματικής συνάρτησης είναι μια ευθεία ε που περνά από το σημεία Α και Β.
Ισοδύναμα είναι μια ευθεία ε που περνά από το σημείο Α και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\bar{u}$



α) Σε *παραμετρική μορφή* η παραπάνω διανυσματική συνάρτηση γράφεται ως

$$x(t) \equiv x = x_A + ta_1$$
$$y(t) \equiv y = y_A + ta_2$$

β) Λύνουμε τις παραπάνω σχέσεις ως προς t

$$\frac{x - x_A}{a_1} = t$$
$$\frac{y - y_A}{a_2} = t$$

Εφ' όσον τα δεύτερα μέλη των παραπάνω σχέσεων είναι ίσα σημαίνει ότι είναι και τα δεύτερα. Επομένως ισχύει

$$\frac{x - x_A}{a_1} = \frac{y - y_A}{a_2}$$

Η παραπάνω μορφή εξίσωσης ονομάζεται *εξίσωση της ευθείας ε σε συμμετρική μορφή*.

γ) Κάνοντας πράξεις με την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι

$$\frac{x - x_A}{a_1} = \frac{y - y_A}{a_2} \Rightarrow a_2(x - x_A) - a_1(y - y_A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα *η εξίσωση της ευθείας ε μπορεί να γραφεί και σαν μορφή μιας ορίζουσας 2x2*.

δ) Εάν γνωρίζουμε δύο σημεία (x_A, y_A) και (x_B, y_B) που ανήκουν σε μια ευθεία ε τότε θέτουμε (α_1, α_2) = ($x_B - x_A$, $y_B - y_A$) και έχουμε ότι

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

στ) Επί πλέον

$$\frac{x - x_A}{a_1} = \frac{y - y_A}{a_2} \Rightarrow a_2(x - x_A) - a_1(y - y_A) = 0 \Rightarrow a_2 x - a_1 y + (a_1 y_A - a_2 x_A) = 0$$

Θέτουμε

$$A = a_2 \ , \ B = -a_1 \ , \ \Gamma = a_1 y_A - a_2 x_A$$

οπότε η εξίσωση της ευθείας ε παίρνει την παρακάτω μορφή

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

ζ) Είναι

$$a_2 x - a_1 y + (a_1 y_A - a_2 x_A) = 0 \Rightarrow y = \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_1 y_A - a_2 x_A}{a_1} \Rightarrow y = c_1 x + c_2 \ , \ a_1 \neq 0$$

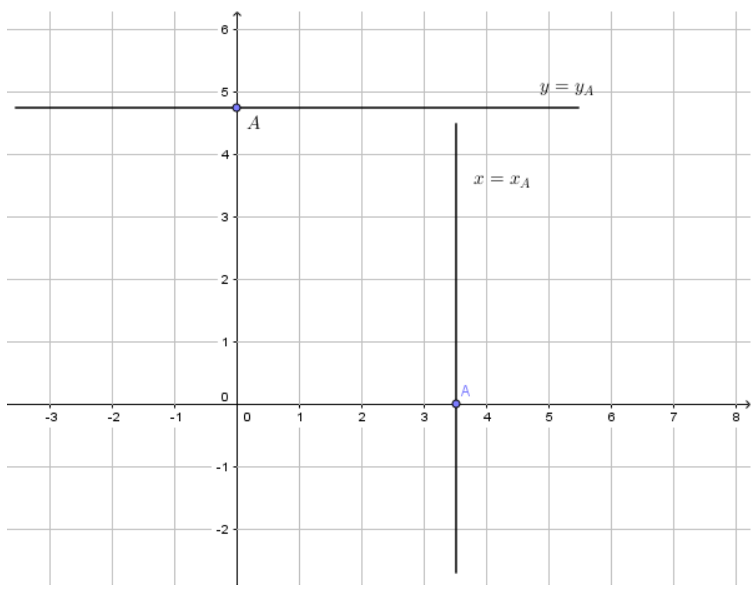
η) Ειδικές περιπτώσεις: Εάν $α_1 = 0$ τότε η εξίσωση της ευθείας ε είναι η

$$x = x_A$$

η οποία είναι παράλληλη στον άξονα y. Εάν $α_2 = 0$ τότε η εξίσωση της ευθείας ε είναι η

$$y = y_A$$

η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x.



Σχόλιο: Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι από δύο σημεία περνά μία και μόνο ευθεία. Επειδή σε ένα ζεύγος σημείων μπορεί να αντιστοιχηθεί ένα διάνυσμα παρατηρούμε ότι

Μια ευθεία ε μπορεί να οριστεί όταν δίδεται ένα σημείο το οποίο ανήκει σε αυτήν και ένα διάνυσμα ($α_1$, $α_2$) το οποίο είναι παράλληλο με την ευθεία

Έστω ευθεία ε η οποία είναι παράλληλη στο διάνυσμα ($α_1$, $α_2$) και έχει εξίσωση Ax+By+Γ=0. Τότε το διάνυσμα (A, B) είναι κάθετο στην ευθεία και το διάνυσμα (B, -A) είναι παράλληλο στην ευθεία. Πράγματι πριν θέσαμε $A = α_2$ και $B = -α_1$ επομένως $(A, B) = (α_2, -α_1)$ άρα

$$\langle (a_1, a_2), (A, B) \rangle = \langle (a_1, a_2), (a_2, -a_1) \rangle = 0$$

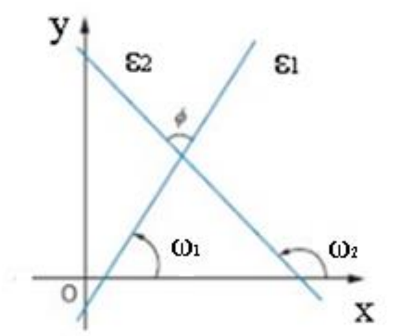
Για το δεύτερο έχουμε ότι (Β,-Α) = (-α$_1$, -α$_2$) που είναι συγραμμικό με το (α$_1$, α$_2$).

Έστω δύο ευθείες ε$_1$ και ε$_2$ του επιπέδου με εξισώσεις

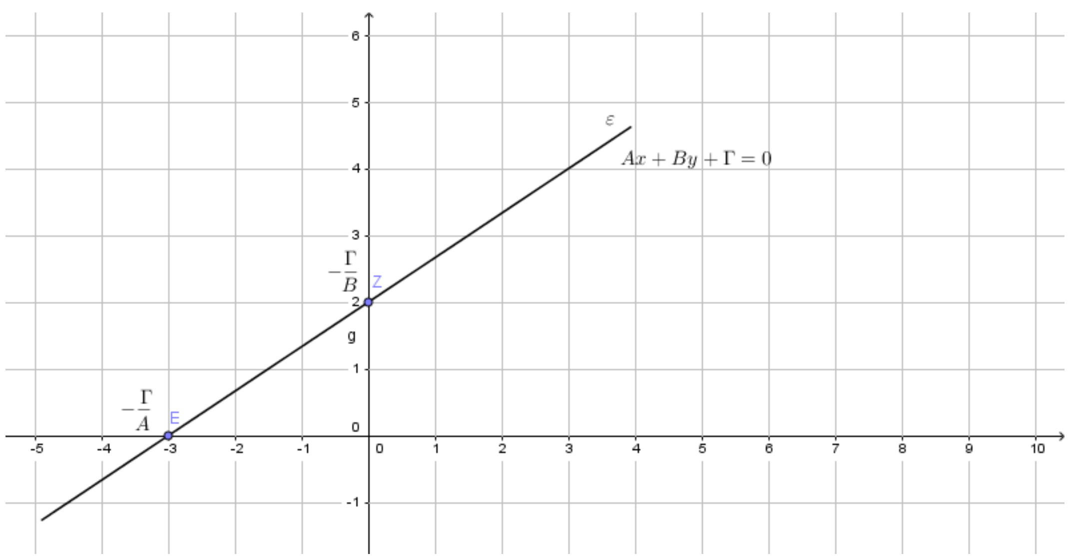
$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$$

Η γωνία φ μεταξύ των ευθειών ε$_1$ και ε$_2$ υπολογίζεται ως

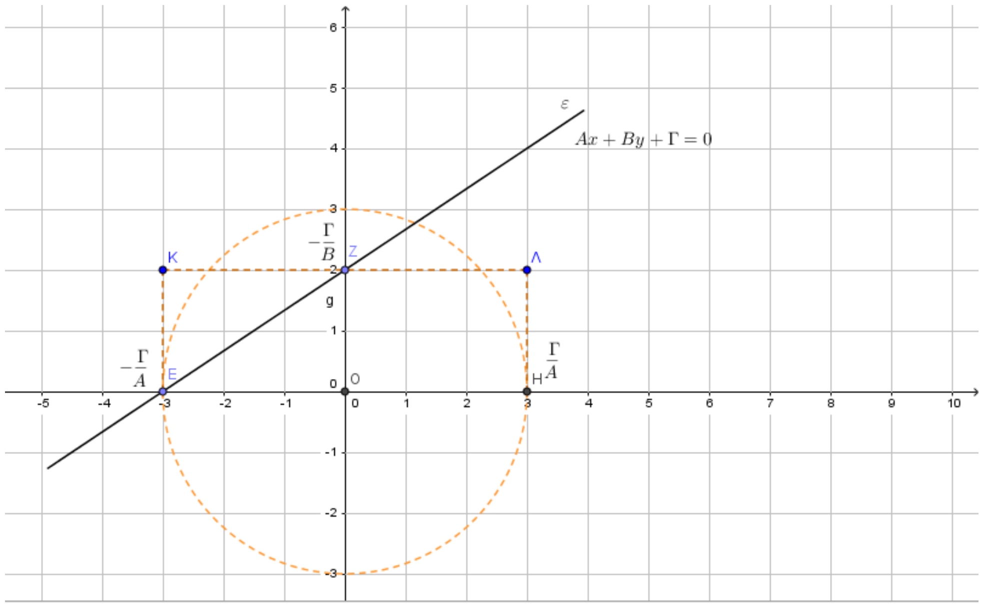
$$\phi = \tau o\xi \sigma \upsilon \nu \left(\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right)$$



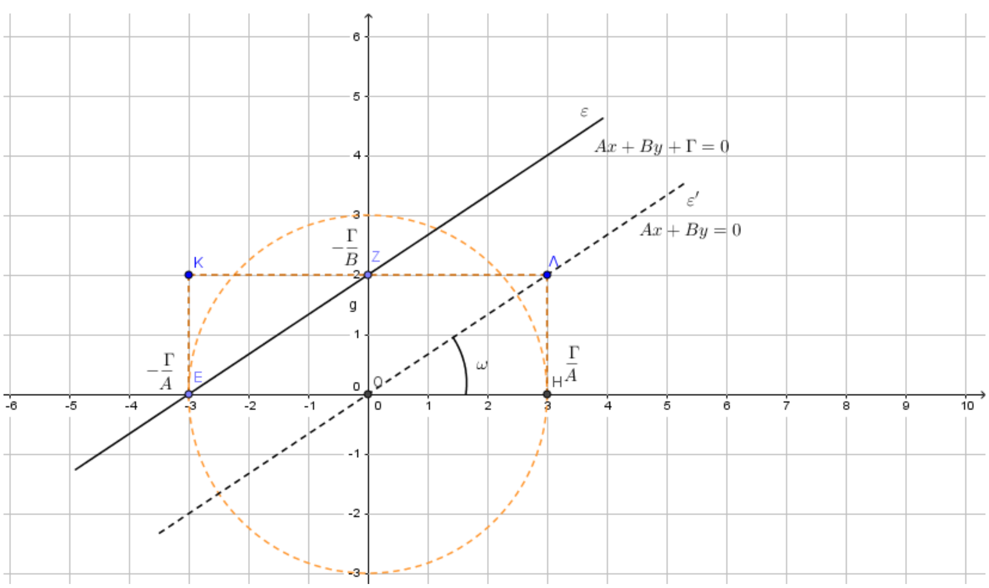
Έστω τώρα μια ευθεία ε η οποία έχει εξίσωση Ax + By + Γ = 0



Με κέντρο το κέντρο του Καρτεσιανού συστήματος αξόνων x και y και ακτίνα Γ/Α σχεδιάζουμε ένα κύκλο.



Στην συνέχεια σχεδιάζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΕΚΛΗ. Το παραλληλόγραμμο αυτό περιέχει δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα το ΕΚΖΟ και το ΟΖΛΗ. Οι διαγώνιοι των δύο αυτών παραλληλογράμμων είναι ίσες και παράλληλες. Επομένως μια ευθεία ε΄ που διέρχεται από τα σημεία Ο και Λ θα είναι παράλληλη στην ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Ε και Ζ.



Η εξίσωση της ευθείας ε΄ βρίσκεται εάν θέσουμε στην σχέση Αx+By+Γ=0 το συντελεστή Γ = 0. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε΄ είναι Αx + By = 0.

Ας βρούμε με τι ισούται η γωνία ω. Είναι

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{-\frac{\Gamma}{B}}{\frac{\Gamma}{A}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -\frac{A}{B} \Rightarrow \omega = \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(-\frac{A}{B}\right)$$

Τον αριθμό λ = εφω τον ονομάζουμε *συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε΄.*

Επειδή οι ευθείες ε και ε΄ είναι παράλληλες και τον αριθμό λ = εφω τον ονομάζουμε και *συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε.*

Το διάστημα των τιμών της γωνίας ω είναι το [0, π) και μετράται αριστερόστροφα από τον άξονα x.

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι εάν έχουμε την εξίσωση μιας ευθείας ε της μορφής Ax+By+Γ= 0 τότε για να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης της θέτουμε Γ = 0 και λύνουμε ως προς y.

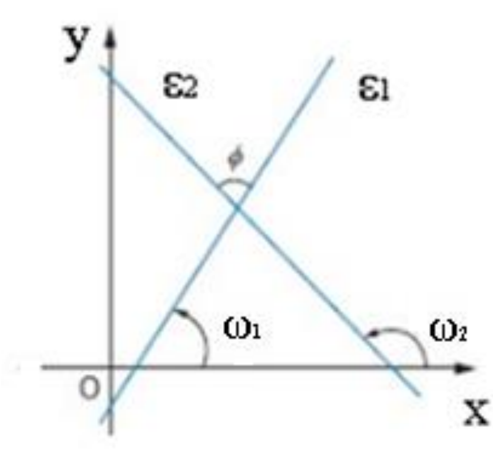
Εάν η εξίσωση της ευθείας ε είναι της μορφής $y = c_1x + c_2$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της είναι το c_1.

Εάν η ευθεία ε είναι παράλληλη με τον άξονα x τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ισούται με το μηδέν. Εάν είναι παράλληλη με τον άξονα y τότε ο συντελεστής διεύθυνσής της δεν ορίζεται.

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου με εξισώσεις

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$$

Έστω ω_1 η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε_1 με τον άξονα x και ω_2 είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε_2 με τον άξονα x.



Θέλουμε να βρούμε πως συνδέεται η γωνία φ με τις γωνίες ω_1 και ω_2. Γνωρίζουμε ότι $\omega_2=\omega_1+\varphi$ άρα $\varphi = \omega_2 - \omega_1$. Άρα

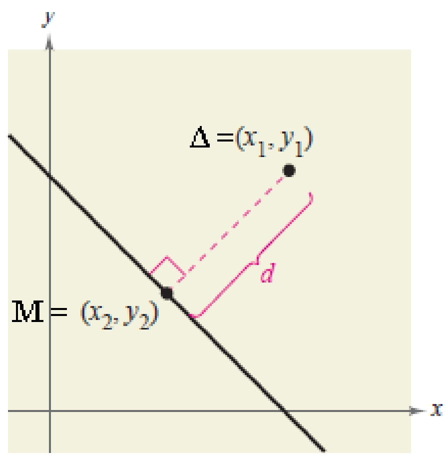
$$\varepsilon\varphi\phi = \varepsilon\varphi(\omega_2 - \omega_1) \Rightarrow \varepsilon\varphi\phi = \frac{\varepsilon\varphi\omega_2 - \varepsilon\varphi\omega_1}{1+\varepsilon\varphi\omega_1\varepsilon\varphi\omega_2} \Rightarrow \phi = \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\varepsilon\varphi\omega_2 - \varepsilon\varphi\omega_1}{1+\varepsilon\varphi\omega_1\varepsilon\varphi\omega_2}\right) = \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}\right)$$

Εάν η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη στον άξονα y τότε $\varphi = \pi/2 - \omega_1$ ($\omega_1 < \pi/2$) ή $\varphi = \omega_1 - \pi/2$ ($\omega_1>\pi/2$). Εάν η ευθεία ε_1 είναι παράλληλη στον άξονα y τότε $\varphi = \omega_2 - \pi/2$ ($\omega_2 > \pi/2$) ή $\varphi=\pi/2-\omega_2$ ($\omega_2 < \pi/2$).

Σχόλιο: Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι εάν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες τότε $\lambda_1\lambda_2 = -1$ και εάν είναι παράλληλες τότε $\lambda_1 = \lambda_2$.

Απόσταση σημείου από ευθεία

Θεωρούμε μια ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση Ax + By + Γ = 0 και ένα σημείο Δ με συντεταγμένες (x_1, y_1). Θέλουμε να βρούμε την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ε. Έστω $M = (x_2, y_2)$ το ίχνος της καθέτου ευθείας στην ευθεία ε που περνά από το σημείο Δ.



Γνωρίζουμε ότι η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα (B, -A) και κάθετη στο διάνυσμα (A,B). Έστω ΜΔ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που το μήκος του είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων Μ και Δ. Τότε

$$\langle (A,B), \overline{M\Delta}\rangle = A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = Ax_1 - Ax_2 + By_1 - By_2 =$$
$$= (Ax_1 + By_1) - (Ax_2 + By_2) = Ax_1 + By_1 + \Gamma$$

Αλλά ισχύει και

$$\langle (A,B), \overline{M\Delta}\rangle = \sqrt{A^2+B^2}\left|\overline{M\Delta}\right|\sigma\upsilon\nu 0 = \sqrt{A^2+B^2}\, M\Delta = \sqrt{A^2+B^2}\, d(\Delta,\varepsilon)$$

Επειδή d(Δ, ε) είναι πάντα θετικός αριθμός έχουμε ότι

$$\left|Ax_1 + By_1 + \Gamma\right| = \sqrt{A^2 + B^2}\, d(\Delta, \varepsilon) \Rightarrow d(\Delta, \varepsilon) = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + \Gamma\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

<u>Ευθεία στο χώρο</u>

Μια ευθεία στο χώρο ορίζεται όπως πριν δηλαδή είτε γνωρίζουμε δύο σημεία τα οποία ανήκουν σε αυτήν είτε ένα σημείο και ένα διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο στην ζητούμενη ευθεία

Για την πρώτη περίπτωση έστω δύο σημεία P και Q με Καρτεσιανές συντεταγμένες

(x_P, y_P, z_P) , (x_Q, y_Q, z_Q)

Η ευθεία που περνά από το σημεία P και Q έχει διανυσματική εξίσωση

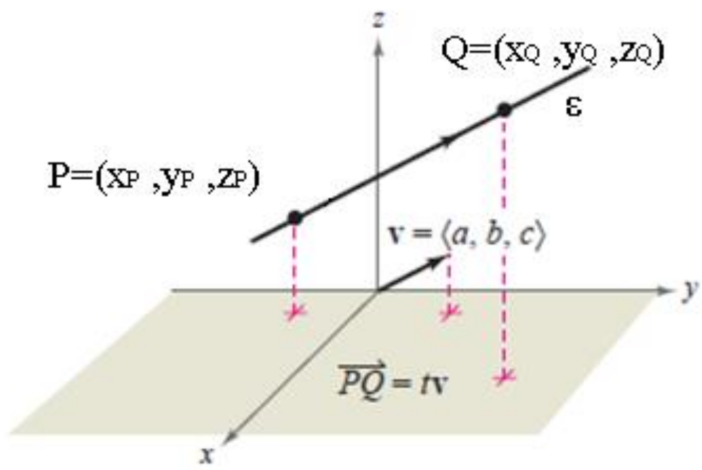
$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x_P + t(x_Q - x_P), y_P + t(y_Q - y_P), z_P + t(z_Q - z_P))$$

Για την δεύτερη περίπτωση έστω

$P = (x_P, y_P, z_P)$
$\bar{v} = (a, b, c)$

Τότε η διανυσματική εξίσωση της ευθείας είναι

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x_P, y_P, z_P) + t\bar{v} = (x(t), y(t), z(t)) = (x_P + ta, y_P + tb, z_P + tc)$$



Όπως και στην περίπτωση του επιπέδου έτσι και εδώ η διανυσματική συνάρτηση της ευθείας μπορεί να πάρει τις παρακάτω μορφές

Παραμετρική

$$x(t) \equiv x = x_1 + ta$$
$$y(t) \equiv y = y_1 + tb$$
$$z(t) \equiv z = z_1 + tc$$

Συμμετρική

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Όπως είδαμε πριν δύο ευθείες στο επίπεδο μπορεί να τέμνονται, να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν. Στον τρισδιάστατο χώρο δύο ευθείες πάλι μπορούν να τέμνονται, να συμπίπτουν ή να είναι παράλληλες αλλά υπάρχει και άλλη μια δυνατότητα.

Δύο ευθείες στο τρισδιάστατο χώρο ονομάζονται *ασύμβατες* όταν δεν είναι παράλληλες και δεν έχουν κοινό σημείο. Έστω

$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x_A, y_A, z_A) + t\bar{u} = (x_A + ta_1, y_A + tb_1, z_A + tc_1)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_2(t) = (x_B, y_B, z_B) + t\bar{v} = (x_B + ta_2, y_B + tb_2, z_B + tc_2)$$

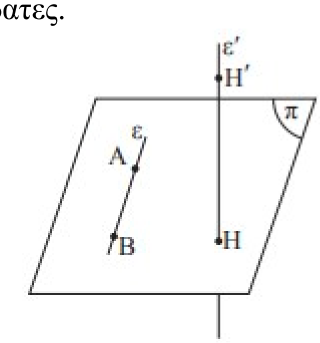
οι διανυσματικές εξισώσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Έστω P ένα τυχαίο σημείο της ευθείας ε_1 και Q ένα τυχαίο σημείο της ευθείας ε_2. Τότε εάν ισχύει

$$[(x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)] = 0$$

τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι συνεπίπεδες. Εάν ισχύει

$$[(x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)] \neq 0$$

τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες.



………………………………