Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

6ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}.$$

Υπόδειξη: Υπενθυμίζουμε την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Λύση.

Σχετικά με την πρώτη σειρά έχουμε

$$\left| \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n} \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n}$ συγκλίνει απολύτως και άρα και κανονικά.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$, έχουμε

$$\frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Στην τρίτη σειρά παρατηρούμε ότι $3n-2 < 3n$ και επομένως $\frac{1}{3n-2} > \frac{1}{3n}$ για κάθε $n \geq 1$. Αν συνέκλινε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ τότε από το Κριτήριο Σύγκρισης θα συνέκλινε και σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$. Επομένως θα συνέκλινε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι άτοπο.

Άσκηση 2 (Κριτήριο Λόγου d' Alembert). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}.$$

Λύση.

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^4} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} \longrightarrow 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ συγκλίνει. (Για την ακρίβεια συγκλίνει απολύτως αλλά μια και η ακολουθία αποτελείται από θετικούς όρους δεν κάνει διαφορά τι από τα δύο θα πούμε.)

Στη δεύτερη

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \longrightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ συγκλίνει.

Σχετικά με την τρίτη σειρά

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{5^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{5^n \cdot n!} \\ &= \frac{5^{n+1}}{5^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 5\cdot(n+1)\cdot \frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n} \\ &= 5\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 5\cdot\frac{1}{(1+1/n)^n} \longrightarrow \frac{5}{e} > 1.\end{aligned}$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\cdot n!}{n^n}$ αποκλίνει.

Άσκηση 3 (Κριτήριο Ρίζας)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}.$$

Λύση.

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ συγκλίνει.

Στη δεύτερη

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ αποκλίνει.

Σχετικά με την τελευταία σειρά

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{e^{-n^2}} = e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n \longrightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ συγκλίνει.

Άσκηση 4 (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-5}{2^n}\,.$$

Υπόδειξη: Στην πρώτη σειρά θεωρήστε την ακολουθία $b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$. Ακολουθήστε παρόμοιο συλλογισμό στις άλλες δύο σειρές.

Λύση.

Σχετικά με την πρώτη σειρά θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}\,, \quad b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1} \cdot n^2 = \frac{n^5+n^2}{4n^5-3n+1} = \frac{1+1/n^3}{4-3/n^4+1/n^5} \longrightarrow \frac{1}{4} > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, επομένως συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}$.

Προχωράμε στη δεύτερη σειρά. Θέτουμε

$$a_n = \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}\,, \quad b_n = \frac{n^3}{n^{7/2}} = \frac{1}{n^{1/2}}, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2} \cdot n^{1/2} = \frac{n^{7/2}+2n^{3/2}+n^{1/2}}{n^{7/2}+2} = \frac{1+2/n^2+1/n^3}{1+2/n^{7/2}} \longrightarrow \frac{1+0}{1+0} = 1 > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ αποκλίνει, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}$ αποκλίνει επίσης.

Στην τελευταία σειρά θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{4^n-5}{2^n}\,, \quad b_n = \frac{4^n}{2^n} = 2^n, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{4^n-5}{2^n} \cdot 2^{-n} = \frac{2^{2n}\cdot 2^{-n} - 5\cdot 2^{-n}}{2^n} = \frac{2^n - 5\cdot 2^{-n}}{2^n} = 1 - \frac{5}{4^n} \longrightarrow 1 > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-5}{2^n}$ αποκλίνει επίσης.

2ος τρόπος για την τελευταία σειρά: Παρατηρούμε ότι

$$\frac{4^n-5}{2^n} = 2^n - \frac{5}{2^n} \geq 1$$

για κάθε $n \geq \mathbf{2}$. (Μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή.) Άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n = \dfrac{4^n - 5}{2^n}$, $n \geq 1$ δεν συγκλίνει στο 0 (για την ακρίβεια συγκλίνει στο $+\infty$) και επομένως η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

Άσκηση 5. Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{3^n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}\,,$$

ως προς τη σύγκλιση.

Λύση.
Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 < 1$$

επομένως από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$ συγκλίνει.

Στη δεύτερη σειρά παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{1+\cos(n)}{3^n}\right| \leq \frac{1+|\cos(n)|}{3^n} \leq \frac{1+1}{3^n} = \frac{2}{3^n}\,,$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα $|x+y| \leq |x|+|y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Εφόσον η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3^n}$ συγκλίνει επίσης.

Εφόσον $\left|\dfrac{1+\cos(n)}{3^n}\right| \leq \dfrac{2}{3^n}$ για κάθε $n \geq 1$, από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\cos(n)}{3^n}$ συγκλίνει απόλυτα και άρα συγκλίνει και με τη συνήθη έννοια.

Σχετικά με την τρίτη σειρά μπορούμε να εφαρμόσουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με $a_n = \dfrac{1}{4n^2-3}$ και $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq \mathbb{N}^*$.

Παρατηρούμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{4n^2-3}\cdot n^2 = \frac{n^2}{4n^2-3} = \frac{1}{4-3/n^2} \longrightarrow \frac{1}{4} > 0.$$

Εφόσον η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-3}$.

β' τρόπος: Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $4n^2 - 3 \geq n^2$ για κάθε n, (ισοδύναμα $4n^2 - n^2 \geq 3$ που ισχύει). Άρα $\dfrac{1}{4n^2-3} \leq \dfrac{1}{n^2}$ για κάθε $n \geq 1$. Εφόσον η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Κριτήριο Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-3}$.

Στην τέταρτη σειρά εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας,

$$\sqrt[n]{\frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}} = \frac{5+1/n}{2^2} \longrightarrow \frac{5}{4} > 1$$

επομένως η σειρά αποκλίνει.

Στην τελευταία σειρά έχουμε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}\cdot\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \left[\frac{n!}{(n+1)!}\right]^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\
&= \frac{4n^2+4n+2n+2}{2(n^2+2n+1)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{n^2+2n+1} \\
&= \frac{2+3/n+1/n^2}{1+2/n+1/n^2} \quad \longrightarrow \; 2 > 1.
\end{aligned}
$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2}$ αποκλίνει.

Άσκηση 6. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

Λύση.

Γνωρίζουμε ότι $\dfrac{1}{n} \to 0$ και συνεπώς $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}} \to 0$. Επιπλέον είναι σαφές ότι $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \geq 1$. Από το Κριτήριο του Leibniz η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ που αποκλίνει. Άρα η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει απολύτως.

Σχετικά με τη δεύτερη σειρά βλέπουμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει.

Άσκηση 7.

(i) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n \cdot \pi + \frac{1}{n}\right)$$

συγκλίνει αλλά **δεν** συγκλίνει **απολύτως**.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\dfrac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x$ για κάθε $x \in [0, \pi/2]$.

(ii) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$$

συγκλίνει.

(iii) Εξετάστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)$$

ως προς τη σύγκλιση.

Λύση.

(i) Είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$\sin\left(n\cdot\pi+\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{n}\right), & n\text{: άρτιος}\\ \\ -\sin\left(\frac{1}{n}\right), & n\text{: περιττός}\end{cases}=(-1)^n\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Η ακολουθία $(\sin(1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στο 0, επομένως από το Κριτήριο του Leibniz η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

συγκλίνει.

Για την απόλυτη σύγκλιση έχουμε

$$\left|\sin\left(n\cdot\pi+\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|$$

για κάθε $n\geq 1$.

Εφαρμόζουμε την ανισότητα $\frac{2}{\pi}\cdot x\leq\sin x$ $\big($για $x\in[0,\pi/2]\big)$ στο $x=\frac{1}{n}\leq 1\leq\frac{\pi}{2}$ και έχουμε

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\sin\left(\frac{1}{n}\right)\geq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}$$

για κάθε $n\geq 1$. Επομένως αν η σειρά συνέκλινε απολύτως, από το Κριτήριο Σύγκρισης θα συνέκλινε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}$. Άρα θα συνέκλινε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, άτοπο.

(ii) Εφαρμόζουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης για $a_n=\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}$ και $b_n=\frac{1}{n^2},\ n\geq 1$. Έχουμε

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}\cdot n^2=\frac{n^2}{2n^2-\sqrt{n}}=\frac{1}{2-1/n^{3/2}}\longrightarrow\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}>0.$$

Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, προκύπτει ότι συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}$.

β' τρόπος: Προσπαθούμε να δείξουμε ότι η ποσότητα $2n^2-\sqrt{n}$ είναι μεγαλύτερη-ίση κάποιου $k_n\geq 0$ με την ιδιότητα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}$ να συγκλίνει. Τότε θα έχουμε $\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}\leq\frac{1}{k_n}$ και από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά θα συγκλίνει.

Δοκιμάζουμε $k_n=n^2$:

$$2n^2-\sqrt{n}\geq n^2\iff 2n^2-n^2\geq\sqrt{n}\iff n^2\geq\sqrt{n}$$

που ισχύει γιατί $n\geq 1$.

Άρα ισχύει $\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}\leq\frac{1}{n^2}$ και από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

(iii) Παρατηρούμε ότι η σειρά δεν είναι τηλεσκοπική - αυτό δεν απαιτείται στη λύση αλλά είναι βοηθητικό. Για να δούμε γιατί δεν είναι τηλεσκοπική ελέγχουμε μερικούς όρους:

$$\begin{aligned}a_1&:\ \frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\\ a_2&:\ \frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\\ a_3&:\ \frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\end{aligned}$$

$$a_4: \ \frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} \ .$$

Βλέπουμε ότι δεν προκύπτουν διαγραφές όπως σε ένα τηλεσκοπικό άθροισμα.
Απλοποιούμε την παράσταση,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} &= \frac{\sqrt{n+1}+1-\sqrt{n+1}+1}{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)} \\
&= \frac{2}{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - 1} \\
&= \frac{2}{n+1-1} \\
&= \frac{2}{n} \ .
\end{aligned}$$

Επομένως η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ αποκλίνει.