Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

4ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Θεωρία Σύγκλισης)**.** Θεωρούμε δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ πραγματικών αριθμών. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; Αν μια πρόταση είναι αληθής δώστε απόδειξη, αλλιώς δώστε ένα παράδειγμα όπου η πρόταση δεν ισχύει.

(i) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη τότε $a_n \cdot \dfrac{1}{n} \to 0$.

(ii) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα τότε η $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι επίσης συγκλίνουσα.

(iii) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσες τότε και η $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσα.

(iv) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσες τότε και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα.

Λύση.

(i) Η πρόταση είναι αληθής. Εφόσον η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $|a_n| \leq M$, δηλαδή $-M \leq a_n \leq M$ για όλα τα $n \geq 1$. Επομένως

$$-\frac{M}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{M}{n}$$

Αφού $\dfrac{M}{n} \to 0$ και $-\dfrac{M}{n} \to 0$ από το Κριτήριο Παρεμβολής ισχύει $\dfrac{a_n}{n} \to 0$.

(ii) Η πρόταση είναι ψευδής. Παίρνουμε $a_n = (-1)^n$ and $b_n = 1$, $n \geq 1$. Τότε $|a_n| \leq 1$ για κάθε $n \geq 1$ και άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη. Προφανώς η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει στο 1. Από την άλλη $a_n \cdot b_n = a_n = (-1)^n$ για κάθε $n \geq 1$ και όπως δείξαμε αυτή δεν είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

(iii) Η πρόταση είναι ψευδής. Παίρνουμε $a_n = (-1)^n$ και $b_n = (-1)^{n+1}$, $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι $b_n = (-1) \cdot (-1)^n = (-1) \cdot a_n = -a_n$ και άρα $a_n + b_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. (Αλλιώς μπορούμε να πούμε ότι $a_n = 1$ και $b_n = -1$ για n: άρτιος, όπως επίσης $a_n = -1$ και $b_n = 1$ για n: περιττός. Επομένως σε κάθε περίπτωση έχουμε $a_n + b_n = 0$.)

Αφού $a_n + b_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$ είναι σαφές ότι η ακολουθία $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει στο 0. Από την άλλη οι ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσες. Αυτό το έχουμε δείξει στο μάθημα για την $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Με όμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσα. Αλλιώς: αν είχαμε $b_n \to b$ τότε και $-b_n \to -b$ δηλαδή $a_n \to -b$ (αφού $a_n + b_n = 0$), οπότε και η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θα ήταν συγκλίνουσα που είναι άτοπο.

(iv) Η πρόταση είναι αληθής. Προφανώς $b_n = a_n + b_n + (-a_n)$ για κάθε $n \geq 1$. Από την υπόθεσή μας $a_n \to a$ και $a_n + b_n \to c$ για κάποια $a, c \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$b_n = a_n + b_n - a_n \to c - a.$$

Άρα η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 2 (Όριο ρητών παραστάσεων)**.**

(i) Δείξτε ότι $\dfrac{1}{2n^2 - 1} \to 0$. (Χωρίς τη χρήση του ορισμού.)

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n+1}{5n^3+n^2+1}$.

(iii) (Γενίκευση των προηγουμένων) Δίνονται δύο πολυώνυμα

$$p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0 \quad \text{και} \quad q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$$

με $a_k, b_m \neq 0$, $m \geq k$ και $m \geq 1$.

Αν $k = m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_k}{b_m}$$

και αν $k < m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0.$$

Υπόδειξη: Διαιρέστε κάθε φορά τους αριθμητή-παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του n.

Λύση.

(i) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το n^2 και έχουμε

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}} \to \frac{0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0.$$

(ii) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το n^3 και έχουμε

$$\frac{n^3-2n+1}{5n^3+n^2+1} = \frac{1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{5+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}} \to \frac{1-2\cdot 0+0}{5+0+0} = \frac{1}{5}\,.$$

(iii) Θεωρούμε τα πολυώνυμα $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0$ και $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ με $a_k, b_m \neq 0$. Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το n^m και έχουμε

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{\dfrac{a_k}{n^{m-k}} + \cdots + \dfrac{a_0}{n^m}}{b_m + \cdots + \dfrac{b_0}{n^m}}\,.$$

Είναι σαφές ότι ο παρονομαστής συγκλίνει στον αριθμό

$$b_m + \cdots + b_0 \cdot 0 = b_m.$$

Αν $k = m$ τότε στον αριθμητή του προηγούμενου κλάσματος έχουμε $n^{m-k} = 1$ και όλοι οι άλλοι εκθέτες του n είναι θετικοί. Επομένως ο αριθμητής του κλάσματος συγκλίνει στον αριθμό

$$a_k + \cdots + a_0 \cdot 0 = a_k,$$

Άρα $\dfrac{p(n)}{q(n)} \to \dfrac{a_k}{b_m}$.

Αν $k < m$ τότε $n^{m-k} \geq n$ και άρα όλοι οι εκθέτες του n στον αριθμητή του πιο πάνω κλάσματος είναι θετικοί. Προκύπτει ότι ο αριθμητής συγκλίνει στον αριθμό

$$a_k \cdot 0 + \cdots + a_0 \cdot 0 = 0.$$

Συνεπώς $\dfrac{p(n)}{q(n)} \to \dfrac{0}{b_m} = 0$.

Άσκηση 3 (Υπολογισμός ορίων)**.** Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

(i) $a_n = \left(-\dfrac{7}{8}\right)^n + \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 1.$

(ii) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1.$

(iii) $c_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}, \quad n \geq 1.$ **Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συζυγή παράσταση.

(iv) $d_n = \dfrac{n^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1}, \quad n \geq 1.$

(v) $e_n = \sqrt[2n]{2n}, \quad n \geq 1.$ **Υπόδειξη:** Τι σχέση έχει η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με την $x_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$;

(vi) $f_n = \sqrt[2n]{n}, \quad n \geq 1.$

Λύση.

(i) Αφού $\left|-\frac{7}{8}\right| < 1$ έχουμε $\left(-\frac{7}{8}\right)^n \to 0$. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$. Συνεπώς

$$a_n = \left(-\frac{7}{8}\right)^n + \sqrt[n]{n} \to 0 + 1 = 1.$$

(ii) Προφανώς $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ και άρα

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Αφού $\frac{1}{n} \to 0$ και $-\frac{1}{n} \to 0$ έχουμε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$.

(iii) Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
c_n &= \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1} \\
&= \frac{(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}) \cdot (\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \frac{(n^2+2) - (n^2+1)}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} \quad (\text{γιατί } n^2 \leq n^2 + 1 \leq n^2 + 2) \\
&= \frac{1}{n+n} \\
&= \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

Αφού $n^2 + 1 \leq n^2 + 2$ έχουμε $c_n \geq 0$ και άρα

$$0 \leq c_n \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $c_n \to 0$.

(iv) Διαιρούμε αριθμητή-παρονομαστή με το n^3 και έχουμε

$$d_n = \frac{n^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sqrt[n]{n} + \frac{1}{n^3}} \longrightarrow \frac{0 + 0 \cdot 0 + 0}{1 - 0 \cdot 1 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

(v) Θέτουμε $x_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι $e_n = \sqrt[2n]{2n} = x_{2n}$. Γνωρίζουμε ότι $x_n \to 1$ και επομένως $x_{2n} \to 1$. Άρα $\sqrt[2n]{2n} \to 1$.

(vii) Θέτουμε όπως και πριν $x_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt[2n]{n} = n^{\frac{1}{2n}} = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_n}.$$

Αφού $x_n \to 1$ έχουμε $\sqrt{x_n} \to 1$, δηλαδή $\sqrt[2n]{n} \to 1$.

Άσκηση 4 (Διερεύνηση σύγκλισης)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που ορίζεται ως εξής:

$$a_n = \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2} \quad n \geq 1.$$

Εξετάστε τις ακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως προς τη σύγκλιση. (Δηλαδή είτε βρείτε το όριο είτε δείξτε ότι δεν συγκλίνουν.)

Υπόδειξη: Συγκλίνουν μόνο δύο από τις προηγούμενες ακολουθίες.

Λύση.

Έχουμε

$$a_{2n} = \frac{1+1\cdot(2n)^2}{2+3\cdot(2n)+(2n)^2} = \frac{4n^2+1}{4n^2+6n+2} = \frac{4+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}} \longrightarrow \frac{4+0}{4+0+0} = 1.$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{1-1\cdot(2n+1)^2}{2+3\cdot(2n+1)+(2n+1)^2} \\ &= \frac{1-4n^2-4n-1}{2+6n+3+4n^2+4n+1} \\ &= \frac{-4n^2-4n}{4n^2+10n+6} \\ &= \frac{-4-\frac{4}{n}}{4+\frac{10}{n}+\frac{6}{n^2}} \\ &\longrightarrow \frac{-4-0}{4+0+0} = \frac{-4}{4} = -1. \end{aligned}$$

Τέλος δείχνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ δεν συγκλίνει. Αν συνέκλινε τότε θα είχαμε $a_{2n+1} - a_{2n} \to 0$. Από την άλλη όμως $a_{2n+1} - a_{2n} \to -1-1 = -2$, το οποίο είναι άτοπο (μοναδικότητα ορίου).

Άσκηση 5 (Φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία και σύγκλιση)**.** Δείξτε από τα αξιώματα του μαθήματος ότι κάθε φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n = -b_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Λύση.

Η ακολουθία $a_n = -b_n$, $n \geq 1$ είναι αύξουσα γιατί για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$b_n \geq b_{n+1} \iff -a_n \geq -a_{n+1} \iff a_{n+1} \geq a_n.$$

Επιπλέον επειδή η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι κάτω φραγμένη υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $b_n \geq M$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως

$$-a_n \geq M \iff a_n \leq -M$$

για κάθε $n \geq 1$ και άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι άνω φραγμένη. Από το αξιώματα του μαθήματος (Αξίωμα Μονότονης Φραγμένης Ακολουθίας) η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό a. Άρα

$$b_n = -a_n \to -a$$

και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 6 (Κριτήρια Λόγου - Ρίζας). Δείξτε ότι οι πιο κάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο 0.

$$a_n = \frac{n^3}{3^n}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \quad n \geq 1,$$

$$c_n = \left(\frac{3n^2+n+1}{7n^4+1}\right)^n \quad n \geq 1,$$

$$d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Για τη δεύτερη και την τέταρτη ακολουθία θυμίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in (2,3)$.

Λύση.
Έχουμε

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \longrightarrow \frac{1}{3} \cdot (1+0) = \frac{1}{3} < 1.$$

Από το Κριτήριο Λόγου ισχύει $a_n \to 0$.

Προχωράμε στην επόμενη ακολουθία:

$$\begin{aligned} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} &= \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = 2 \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2 \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{2}{e} < 1. \end{aligned}$$

Επομένως πάλι από το Κριτήριο Λόγου έχουμε $b_n \to 0$.

Στις επόμενες δύο ακολουθίες εφαρμόζουμε το Κριτήριο Ρίζας.

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{3n^2+n+1}{7n^4+1} = \frac{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^4}} \longrightarrow \frac{0}{7} = 0 < 1.$$

Επομένως από το Κριτήριο Ρίζας έχουμε $c_n \to 0$. Τέλος

$$\sqrt[n]{|d_n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < \frac{1}{2} < 1.$$

Από το Κριτήριο Ρίζας προκύπτει $d_n \to 0$.

Άσκηση 7 (Ακολουθίες με μεταβλητό πλήθος προσθετέων). Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}.$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

(i) $x_{n+1} - x_n > 0$,

(ii) $x_n < 1$.

Τι συμπεραίνετε για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; (Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε κάποιο όριο.)

Λύση.
(i) Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\
&\quad - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{n+n} \\
&= \qquad \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&\quad - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots\cdots\cdots - \frac{1}{2n} \\
&= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $2n+1 < 2n+2$.

(ii) Παρατηρούμε ότι για κάθε $k = 1, \ldots, n$ ισχύει $\dfrac{1}{n+k} \leq \dfrac{1}{n+1}$ επομένως

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

για κάθε $n \geq 1$. (Στον ορισμό του x_n έχουμε n προσθετέους.)

Εφόσον η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη προκύπτει ότι είναι και συγκλίνουσα.

Σχόλιο: Μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα ότι $x_n \to \ln(2)$.

Άσκηση 8. Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Εκφράστε τις πιο πάνω ακολουθίες με τη βοήθεια της $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$

Λύση.
Υπολογίζουμε

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n+1}} = x_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

και

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2} = (x_{2n})^{1/2} = \sqrt{x_{2n}}$$

για κάθε $n \geq 1$.

Εφόσον $x_n \to e$ ισχύει $x_{n+1} \to e$ και $x_{2n} \to e$. Άρα

$$a_n = x_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \longrightarrow e \cdot 1 = e$$

και

$$b_n = \sqrt{x_{2n}} \longrightarrow \sqrt{e}.$$

Άσκηση 9 (Η ακολουθία του αριθμού e - Απαιτητική)**.** Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$

(i) Δείξτε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(ii) Δείξτε ότι $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε το (i) και την ανισότητα Bernoulli.

Λύση.

i) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\qquad\qquad \text{(πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το } (n+1)/n) \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} .
\end{aligned}$$

(ii) Αφού $-\dfrac{1}{(n+1)^2} > -1$ έχουμε από την ανισότητα Bernoulli και το (i)

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&\geq \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - (n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)^2}\right] \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1.
\end{aligned}$$