Ολοκληρώματα

(Περιλαμβάνει αναπλήρωση σχολικής ύλης λόγω πανδημίας)

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης
Το εμβαδόν ως όριο

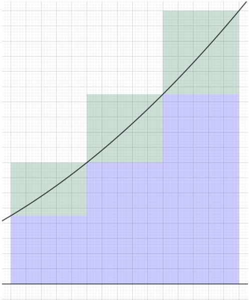
Διευκρίνιση Για όσες/όσους έχουν ήδη μελετήσει ολοκληρώματα: με τον όρο "ολοκλήρωμα" εννοούμε "ορισμένο ολοκλήρωμα".

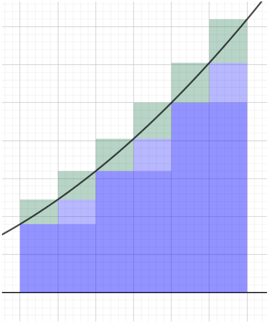
Κίνητρο. Εύρεση εμβαδών και όγκων (Εύδοξος - Αρχιμήδης).

Μοντέρνα διατύπωση. Εύρεση εμβαδού ανάμεσα στη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ και του άξονα $x'x$.

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Διαιρούμε το $[a,b]$ σε n-το πλήθος ίσα και διαδοχικά υποδιαστήματα και παίρνουμε τα ορθογώνια που σχηματίζονται από αυτά τα διαστήματα και τη γραφική παράσταση της f.

Σχήματα: Επιτυγχάνουμε μια προσέγγιση του εμβαδού από κάτω (μπλε ορθογώνια) και από πάνω (μπλε και πράσινα ορθογώνια).



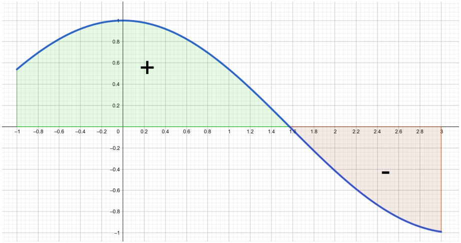


Όσο πιο μεγάλο το n
τόσο καλύτερη η προσέγγιση

Ας συμβολίσουμε με L_n το εμβαδόν των μπλε ορθογωνίων στο n-στο βήμα.

Αποδεικνύεται ότι η ακολουθία $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό, ο οποίος εκφράζει την έννοια του εμβαδού ανάμεσα στη γραφική παράσταση της f και του άξονα $x'x$.

Όταν η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ προσμετράμε το εμβαδόν αρνητικά.



Αυτό το όριο ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)dx$. Δηλαδή

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} L_n.$$

(Αποδεικνύεται ότι αν πάρουμε τα μπλε μαζί με τα πράσινα ορθογώνια αντί μόνο των μπλε, το όριο παραμένει το ίδιο.)

Η έννοια του ολοκληρώματος επεκτείνεται και σε μια μεγάλη κατηγορία μη συνεχών συναρτήσεων, αλλά εμείς θα περιοριστούμε στις συνεχείς.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f\colon [a,a] \to \mathbb{R}$ τότε *ορίζουμε* το ολοκλήρωμά της να είναι *μηδέν*, δηλαδή

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Χρήσιμος *συμβολισμός*: αν $a < b$ με $\int_b^a f(x)dx$ εννοούμε τον *αντίθετο* αριθμό του ολοκληρώματος, δηλαδή

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

(Το $\int_b^a f(x)dx$ παύει να έχει το νόημα εμβαδού.)

Αν η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα σύνολο που περιέχει το κλειστό διάστημα $[a,b]$ με $\int_a^b f(x)dx$ εννοούμε το ολοκλήρωμα του *περιορισμού της f* στο $[a,b]$.

Π.χ. αν $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορούμε πάλι να πάρουμε το $\int_0^1 f(x)dx$.

Ιδιότητες Ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\min(f\,|[a,b]) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max(f\,|[a,b]) \cdot (b-a)$$

$$f \leq g \text{ στο } [a,b] \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

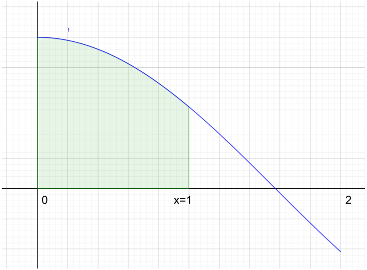
Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Θεωρούμε ότι έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Παρατηρούμε ότι $F(a) = 0$ και $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Παράδειγμα: δίνεται η πιο κάτω $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, η τιμή $F(1)$ είναι το εμβαδόν της πράσινης περιοχής



Θεώρημα: (Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού - Fundamental Theorem of Calculus)

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *και την* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *με* $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. *Τότε η* F *είναι συνεχής, διαφορίσιμη και*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Πόρισμα. Δίνονται δύο συναρτήσεις $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ με την f συνεχή και την F παραγωγίσιμη. Αν $F' = f$ τότε

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Με άλλα λόγια αν μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση F με $F' = f$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Παρατηρήσεις. 1) Η διαφορά $F(b) - F(a)$ συμβολίζεται συνήθως με $F(x)\big|_a^b$.

2) Ο τύπος $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ισχύει και για $b \leq a$. Αυτό προκύπτει εύκολα από τον κανονικό τύπο. Π.χ. για $b = 1$ και $a = 2$ έχουμε

$$\int_2^1 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx = -(F(2) - F(1)) = F(1) - F(2).$$

Απόδειξη του Πορίσματος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$. Τότε

$$F_0{}'(x) = f(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Άρα $F_0{}' = F'$ ή αλλιώς $(F - F_0)' = 0$. Επομένως $F - F_0 = c \in \mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F_0(b) = F_0(b) - F_0(a) \\ &= F_0(b) + c - (F_0(a) + c) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^2 dx$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \frac{x^3}{3}$ για $x \in [0, 1]$ και παρατηρούμε ότι $F'(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Άρα

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}\ .$$

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Μια συνάρτηση $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι *παράγουσα* (anti-derivative) της $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ αν $F'=f$. Π.χ. η $F(x)=x^3$, $x\in[0,1]$ είναι παράγουσα της $f(x)=3x^2$.

Η παράγουσα εφόσον υπάρχει δεν είναι μοναδική, για την ακρίβεια δύο παράγουσες της ίδιας συνάρτησης διαφέρουν κατά μία σταθερά.

Με τον όρο *αόριστο ολοκλήρωμα* μιας συνάρτησης f εννοούμε μια οποιαδήποτε παράγουσα της f. Συμβολίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f με $\displaystyle\int f(x)dx$.

Αιτιολόγηση συμβολισμού. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$.

(Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν το αόριστο ολοκλήρωμα ως το σύνολο όλων των παραγουσών.)

Αν $F' = f$ γράφουμε

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}.}$$

Αιτιολόγηση. Τα $\int f(x)dx$ και F είναι παράγουσες της συνάρτησης f επομένως διαφέρουν κατά μία σταθερά.

Η σταθερά c είναι ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός και ονομάζεται *σταθερά ολοκλήρωσης*.

Γενικά η σταθερά c παραμένει ως έχει χωρίς να την προσδιορίζουμε. Από την άλλη κάποια προβλήματα παρέχουν δεδομένα που μας επιτρέπουν τον προσδιορισμό της σταθεράς.

Στοιχειώδη αόριστα ολοκληρώματα

$$\int K dx = K \cdot x + c$$

$$\int x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ όπου } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \quad \text{ή} \quad \ln(-x) + c = \ln|x| + c$$

(ανάλογα με το αν το x είναι θετικό ή αρνητικό)

$$\int e^{x} dx = e^{x} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0)$$