Γενικευμένα ολοκληρώματα και το Ολοκληρωτικό Κριτήριο

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους

Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f\colon [M,\infty) \to \mathbb{R}$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f είναι το

$$\int_M^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_M^R f(x)\,dx$$

εφόσον φυσικά υπάρχει το πιο πάνω όριο στο $\mathbb{R}$. Όμοια αν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f\colon (-\infty, M] \to \mathbb{R}$ ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f,

$$\int_{-\infty}^M f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^M f(x)\,dx$$

εφόσον υπάρχει το πιο πάνω όριο στο $\mathbb{R}$. Τέλος αν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

με την προϋπόθεση ότι τα τελευταία δύο ολοκληρώματα ορίζονται για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση δεν έχει σημασία η επιλογή του c: δηλαδή αν ορίζονται τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ τότε για κάθε $d \in \mathbb{R}$ ορίζονται επίσης τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx$, $\int_{d}^{\infty} f(x)\,dx$ και μάλιστα ισχύει

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Τα $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$, $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ονομάζονται γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους.

Γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους

Αυτό αναφέρεται σε συνεχείς συναρτήσεις f που ορίζονται σε διαστήματα της μορφής $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και όπου η f δεν έχει συνεχή επέκταση στο $[a, b]$. Για παράδειγμα έχουμε την $f : (0, 1] \to \mathbb{R} : f(x) = x^{-1}$.

Για $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ όπως πιο πάνω ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R \to a} \int_R^b f(x)\,dx$$

εφόσον υπάρχει το πιο πάνω όριο. Ανάλογα ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f για $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, όπου f όπως πιο πάνω.

Τέλος για $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ όπως πιο πάνω ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

για $c \in (a,b)$ για το οποίο τα τελευταία δύο ολοκληρώματα υπάρχουν. (Όπως πριν δεν παίζει ρόλο η επιλογή του c.)

Τα προηγούμενα ολοκληρώματα ονομάζονται γενικευμένα ολοκληρώματα β' είδους.

Παραδείγματα

1) $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$. Για κάθε $R > 1$ έχουμε

$$\int_1^R \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^R = -\frac{1}{R} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 1.$$

Άρα $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$.

2) $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$. Για κάθε $R > 1$ έχουμε

$$\int_1^R \frac{1}{x}\, dx = \ln x\,\Big|_1^R = \ln R - \ln 1 = \ln R \xrightarrow{R\to\infty} \infty.$$

Επομένως δεν ορίζεται το $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$. (Κάποιοι συγγραφείς λένε ότι $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \infty$ ή ότι το ολοκλήρωμα αποκλίνει.)

3) $I = \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx$. Για κάθε $R > 1$ έχουμε

$$\int_0^R e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \Big|_0^R = -\frac{1}{2} \cdot (e^{-2R} - e^0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot e^{2R}} \xrightarrow{R \to \infty} \frac{1}{2}.$$

Άρα $\int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx = 1/2$.

4) $I = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x}\, dx$. Για κάθε $R > 1$ έχουμε

$$\int_2^R \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int_2^R \frac{(\ln x)'}{\ln x}\, dx = \ln(\ln x) \Big|_2^R = \ln \ln R - \ln \ln 2 \xrightarrow{R \to \infty} \infty.$$

Ολοκληρωτικό Κριτήριο (Maclaurin–Cauchy test)

Έστω m φυσικός αριθμός και μια συνεχής γνησίως φθίνουσα $f\colon [m,\infty) \to (0,\infty)$.

Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_m^\infty f(x)dx$ υπάρχει αν και μόνο αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=m}^\infty f(n)$ συγκλίνει.

Παράδειγμα. Παίρνουμε την $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$ για $x \geq 2$. Τότε η f είναι θετική και γνησίως φθίνουσα. Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά $\sum_{n=2}^\infty \dfrac{1}{n \cdot \ln n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_2^\infty \dfrac{1}{x \cdot \ln x}\, dx$.

Στο παράδειγμα 4) είδαμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει, άρα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \cdot \ln n}$ αποκλίνει.