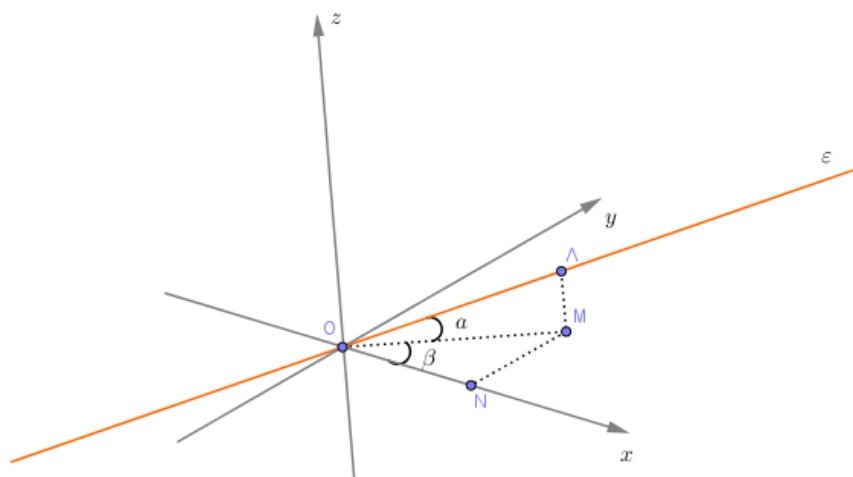


Στιγμιαίο επίπεδο πτήσης αεροπλάνου

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση μιας ευθείας ε η οποία σχηματίζει γωνία α με το θετικό ημιεπίπεδο xy και γωνία β με το θετικό ημιεπίπεδο xz και διέρχεται από την αρχή O του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (x, y, z) .



Έστω η άγνωστη διανυσματική συνάρτηση της ευθείας ε

$$\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (0,0,0) + t(x_0, y_0, z_0)$$

Οι συντεταγμένες του διανύσματος (x_0, y_0, z_0) ισούνται με

$$x_0 = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, \quad y_0 = \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta, \quad z_0 = \eta\mu\alpha$$

Επομένως η διανυσματική εξίσωση της ευθείας ε που ψάχνουμε είναι

$$\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = t(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta, \eta\mu\alpha)$$

Η παραπάνω κατασκευή μπορεί να επεκταθεί και για άλλες περιπτώσεις δεδομένων

α	β	β	x	y	z	x_0	y_0	z_0
xy	xz		>0	>0	>0	συνασυνβ	συναημβ	ημα
xy		yz	<0	>0	>0	-συναημβ	συνασυνβ	ημα
xy	xz		<0	<0	>0	-συνασυνβ	-συναημβ	ημα
xy		yz	>0	<0	>0	συναημβ	-συνασυνβ	ημα
xy	xz		>0	>0	<0	συνασυνβ	συναημβ	-ημα
xy		yz	<0	>0	<0	-συναημβ	συνασυνβ	-ημα
xy	xz		<0	<0	<0	-συνασυνβ	-συναημβ	-ημα
xy		yz	>0	<0	<0	συναημβ	-συνασυνβ	-ημα

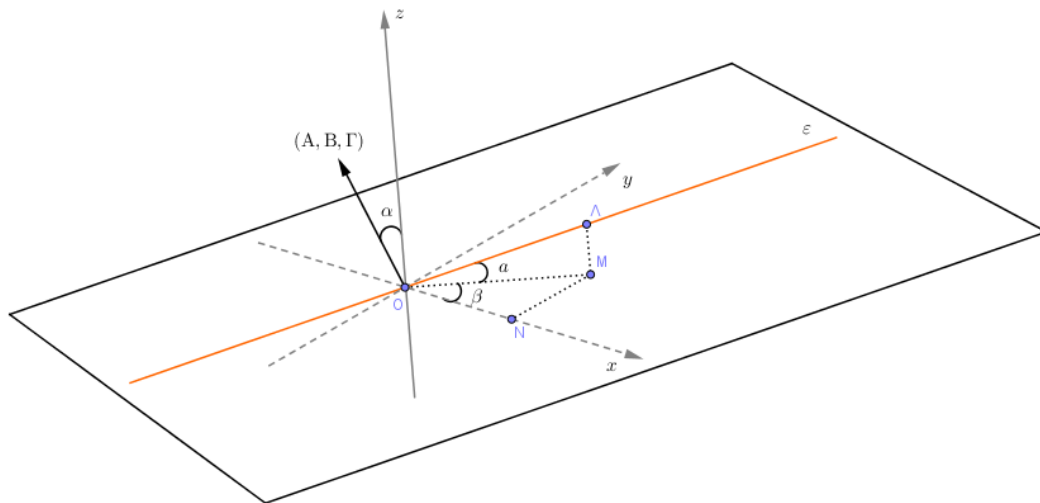
Εάν θέλουμε η ευθεία να διέρχεται και από ένα σημείο A με συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A) τότε η διανυσματική εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι

$$\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x_A, y_A, z_A) + t(x_0, y_0, z_0)$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η εξίσωση ενός επιπέδου που περιέχει την προηγούμενη ευθεία και είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τον φορέα ενός κάθετου διανύσματος του και τον άξονα z.

Θα δούμε την πρώτη από τις παραπάνω περιπτώσεις και οι άλλες προκύπτουν ανάλογα.



Για να βρούμε την εξίσωση του επιπέδου αρκεί να βρούμε ένα κάθετο διάνυσμα στο διάνυσμα $(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta, \eta\mu\alpha)$. Ένα κάθετο διάνυσμα είναι

$$(A, B, \Gamma) = (-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, -\eta\mu\alpha\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha)$$

Επομένως η εξίσωση του επιπέδου που ψάχνουμε είναι

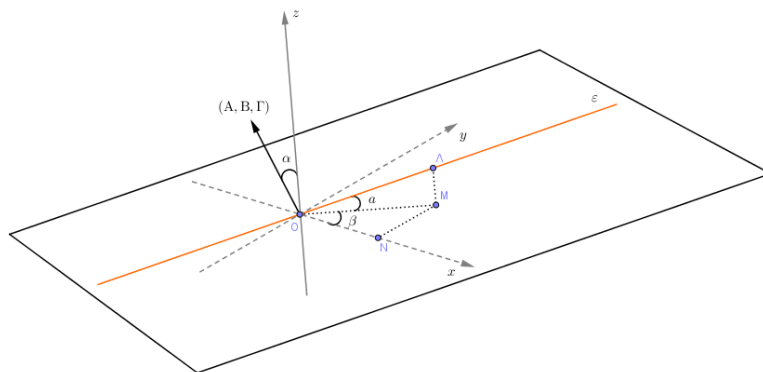
$$(-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta)x + (-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)y + (\sigma\upsilon\nu\alpha)z = 0$$

Εάν μας ζητείται το επίπεδο να διέρχεται και από μια απόσταση z_0 από το επίπεδο xy τότε η εξίσωση είναι

$$(-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta)x + (-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)y + (\sigma\upsilon\nu\beta)z - (\sigma\upsilon\nu\alpha)z_0 = 0$$

Εάν μας ζητείται να διέρχεται και από ένα σημείο (x_A, y_A, z_A) τότε η εξίσωση είναι

$$(-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta)x + (-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)y + (\sigma\upsilon\nu\alpha)z + (\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta)x_A + (\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)y_A - (\sigma\upsilon\nu\alpha)z_A = 0$$



Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την προηγούμενη ευθεία και είναι κάθετο με το προηγούμενο επίπεδο που την περιέχει και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Αρκεί να βρούμε ένα κάθετο διάνυσμα με το διάνυσμα (A, B, Γ) . Είναι

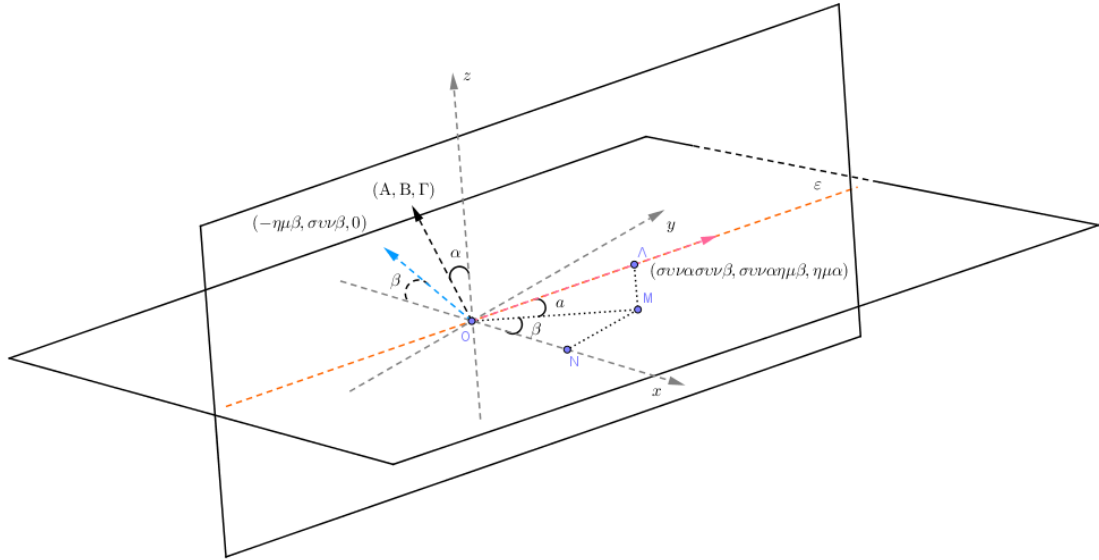
$$(A, B, \Gamma) = (-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, -\eta\mu\alpha\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha)$$

και αν (A_1, B_1, Γ_1) το διάνυσμα που ψάχνουμε τότε αυτό ισούται με

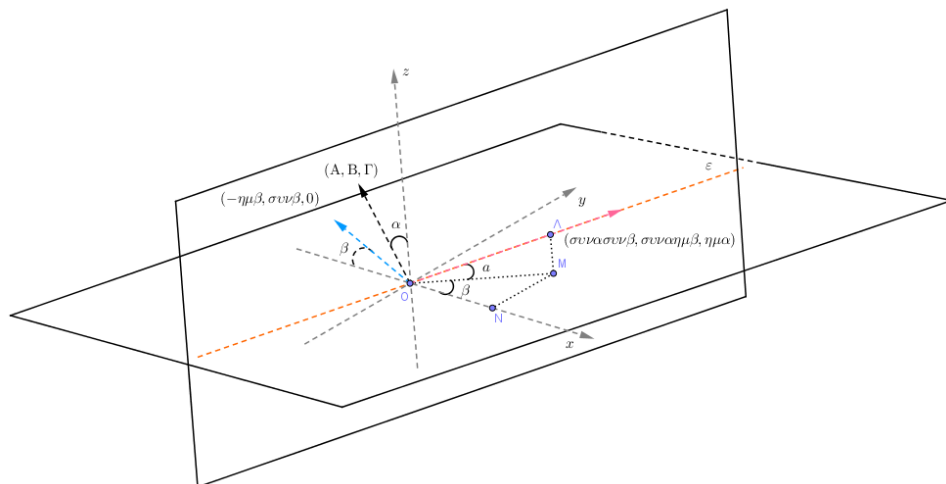
$$(A_1, B_1, \Gamma_1) = (-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, -\eta\mu\alpha\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha) \otimes (\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta, \eta\mu\alpha) = (-\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\beta, 0)$$

Η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$(-\eta\mu\beta)x + (\sigma\upsilon\nu\beta)y + 0z = 0$$



Εάν μας ζητείται να διέρχεται και από ένα συγκεκριμένο σημείο τότε η σταθερά Δ προσδιορίζεται όπως πριν.



Παράδειγμα 4

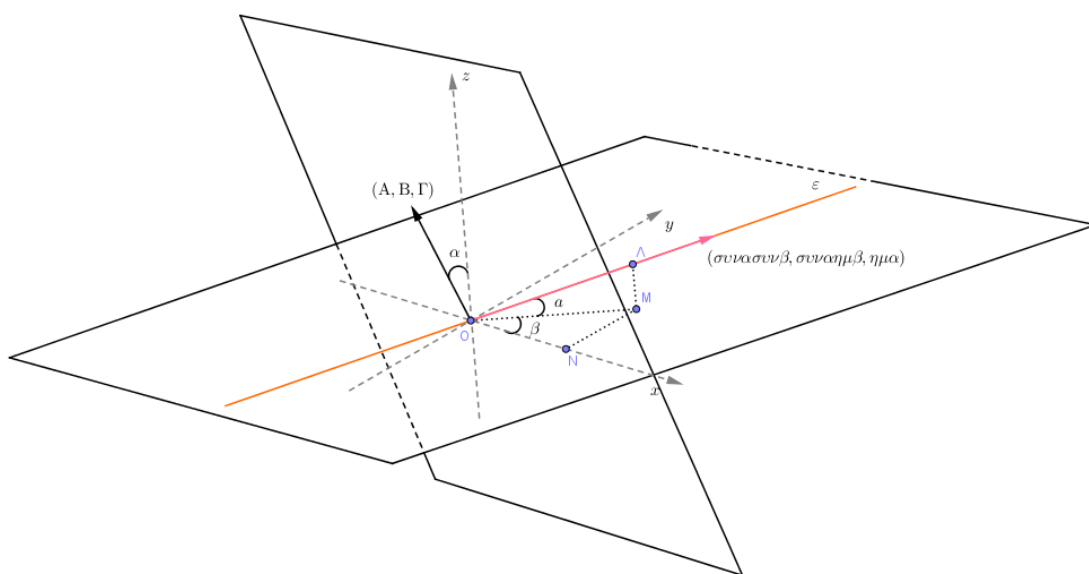
Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο επίπεδο αλλά δεν περιέχει την ευθεία και διέρχεται από την αρχή O του Καρτεσιανού συστήματος αξόνων (x,y,z) .

Το επίπεδο που ζητάμε είναι

$$(\sigma\nu\alpha\sigma\nu\nu\beta)x + (\sigma\nu\alpha\eta\mu\beta)y + (\eta\mu\alpha)z = 0$$

Εάν μας ζητείται να διέρχεται και από ένα συγκεκριμένο σημείο τότε το Δ προσδιορίζεται όπως πριν.

Σχόλιο: Το διάνυσμα (A, B, Γ) κείται επί του επιπέδου που βρήκαμε



Παράδειγμα 5

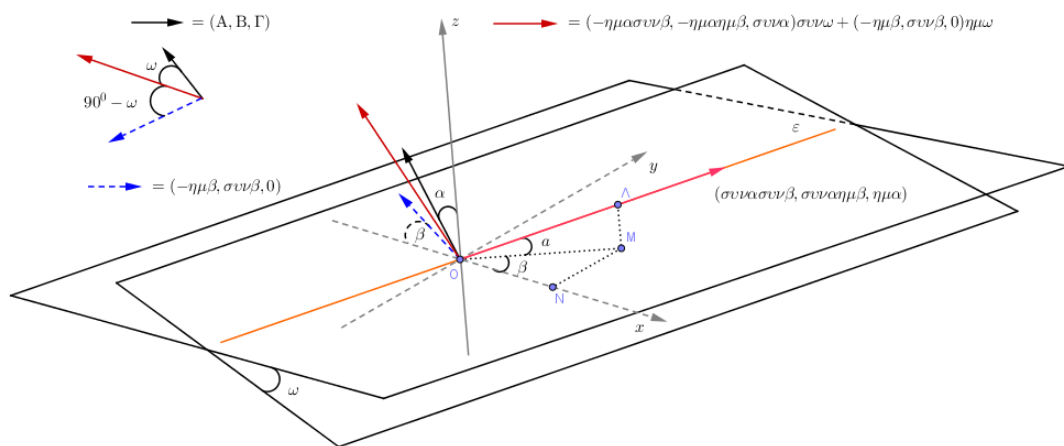
Να βρεθεί ένα επίπεδο το οποίο περιέχει την ευθεία και σχηματίζει γωνία ω με το αρχικό.

Στα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε βρει μια δεξιόστροφη ορθομοναδιαία τριάδα (μοναδιαία διανύσματα και κάθετα μεταξύ τους ανά δύο) η οποία είναι

$$\begin{aligned} &(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta, \eta\mu\alpha) \\ &(-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, -\eta\mu\alpha\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha) = (A, B, \Gamma) \\ &(-\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\beta, 0) \end{aligned}$$

Το επίπεδο που ψάχνουμε έχει κάθετο διάνυσμα το

$$(-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, -\eta\mu\alpha\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha)\sigma\upsilon\nu\omega + (-\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\beta, 0)\eta\mu\omega$$



Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$(-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\beta\eta\mu\omega)x + (-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\omega)y + (\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\omega)z = 0$$

Εάν μας ζητείται να διέρχεται και από ένα γνωστό σημείο ακολουθούμε την διαδικασία που περιγράψαμε πιο πριν.



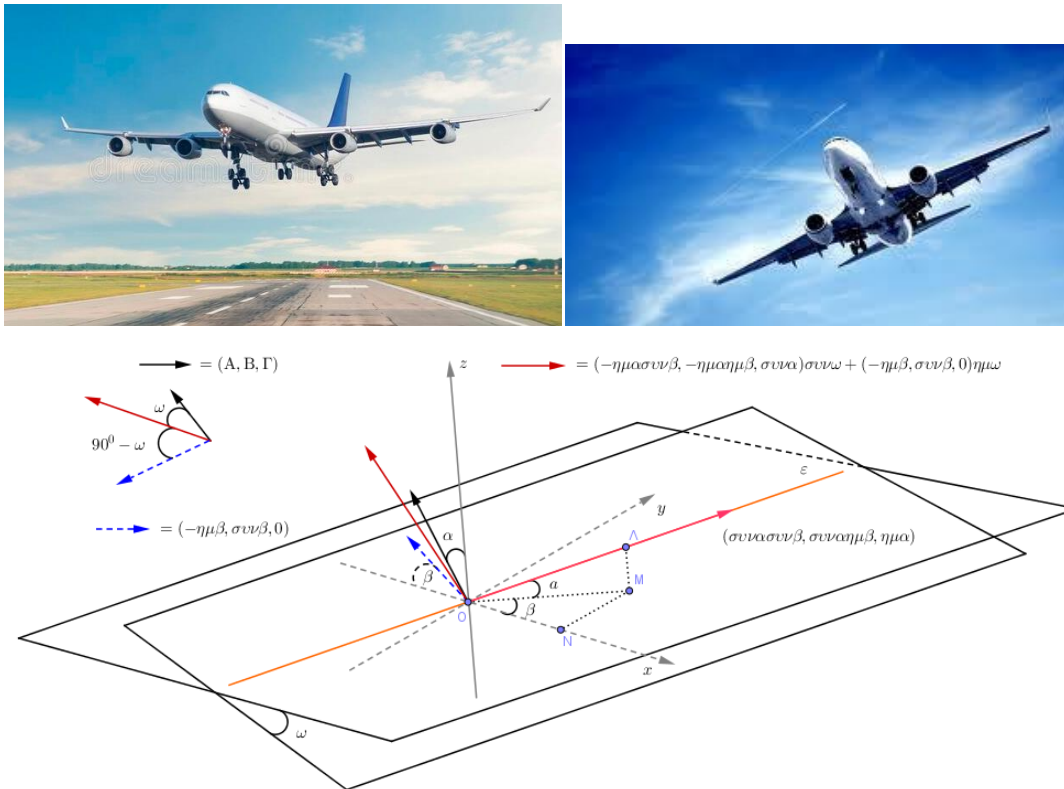
Σχόλιο: Εάν ζητάμε και ένα επίπεδο το οποίο έχει στραφεί κατά μια γωνία θ δεξιόστροφη ως προς το διάνυσμα $(-\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\beta, 0)$ τότε το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου αυτού είναι

$$\begin{aligned} & (-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, -\eta\mu\alpha\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha)\sigma\upsilon\nu\omega + (\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta, \eta\mu\alpha)\eta\mu\omega\eta\mu\theta + \\ & + (-\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\beta, 0)\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\theta = \\ & = (-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\omega\eta\mu\theta - \eta\mu\beta\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\theta, \\ & \quad , -\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\omega\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\theta, \\ & \quad , \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\alpha\eta\mu\omega\eta\mu\theta) = (A_2, B_2, \Gamma_2) \end{aligned}$$

Η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$A_2x + B_2y + \Gamma_2z = 0$$

Εάν μας ζητείται να διέρχεται και από ένα σημείο τότε η σταθερά Δ_2 βρίσκεται από την γνωστή διαδικασία.



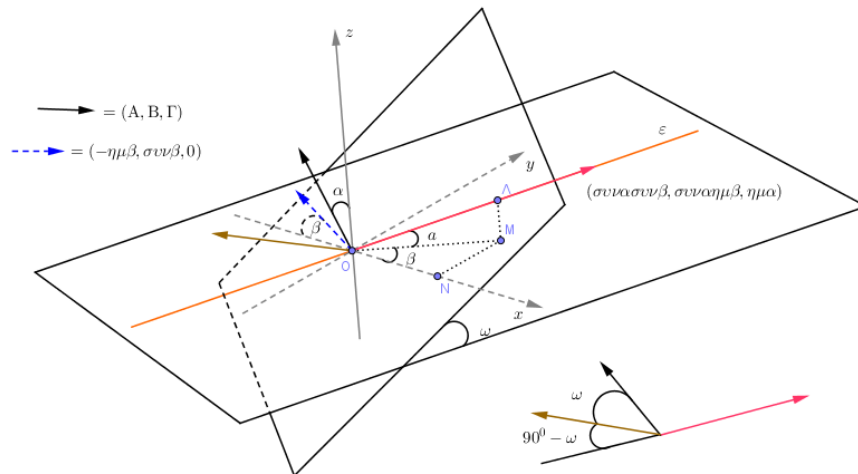
Παράδειγμα 6

Να βρεθεί η εξίσωση ενός επιπέδου που σχηματίζει γωνία ω με το αρχικό και η τομή τους είναι σε διεύθυνση κάθετη ως προς την ευθεία. Το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου που ψάχνουμε είναι

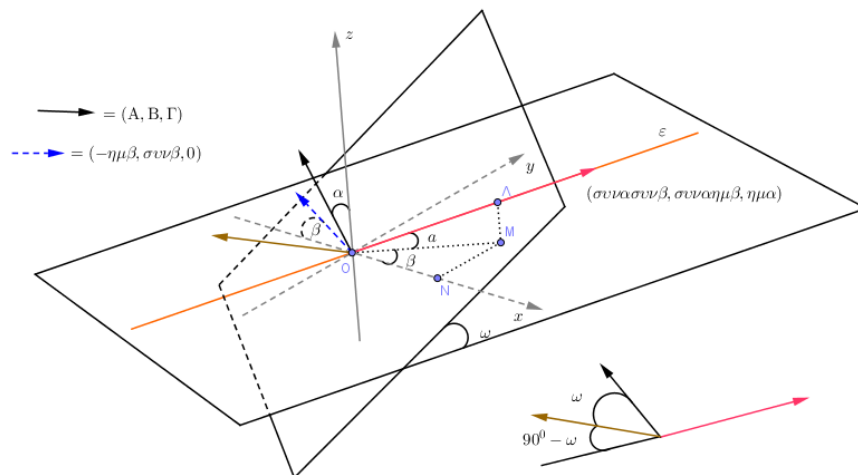
$$\begin{aligned} & (-\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, -\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta, -\eta\mu\alpha)\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) + \\ & + (-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, -\eta\mu\alpha\eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha)\eta\mu(90^\circ - \omega) \end{aligned}$$

Επομένως το επίπεδο που ψάχνουμε έχει εξίσωση

$$(-\sigma\eta\alpha\sigma\eta\nu\beta\eta\omega - \eta\mu\alpha\sigma\eta\nu\beta\sigma\eta\omega)x + (-\sigma\eta\alpha\eta\mu\beta\eta\omega - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta\sigma\eta\omega)y + (-\eta\mu\alpha\eta\omega + \sigma\eta\alpha\sigma\eta\nu\omega)z = 0$$



Εάν μας ζητηθεί να διέρχεται και από ένα γνωστό σημείο ακολουθούμε την διαδικασία που περιγράψαμε πιο πριν.



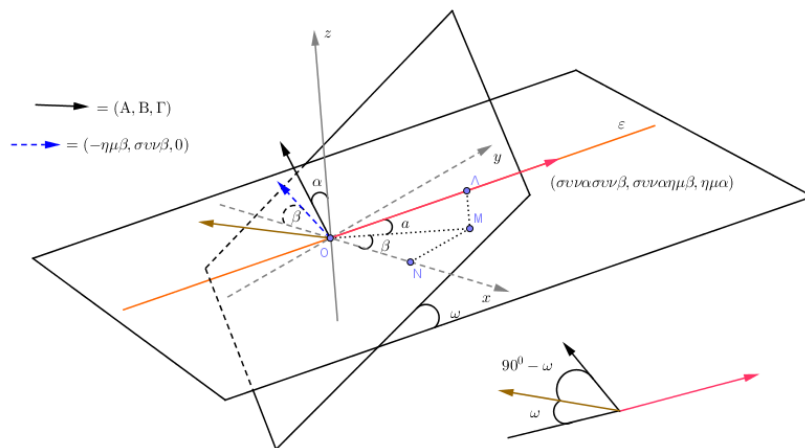
Σχόλιο: Εάν το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου αυτού στραφεί και κατά μια γωνία θ αριστερόστροφη ως προς το διάνυσμα $(-\sigmaυνασιν\beta, -\sigmaυναημ\beta, -\etaμ\alpha)$ τότε αυτό θα ισούται με

$$\begin{aligned} &(-\eta\mu\alpha\sigmaυν\beta, -\eta\mu\alpha\etaμ\beta, \sigmaυν\alpha)\sigmaυν\omega - (\sigmaυν\alpha\sigmaυν\beta, \sigmaυν\alpha\etaμ\beta, \etaμ\alpha)\etaμ\omega\sigmaυν\theta - \\ & - (-\etaμ\beta, \sigmaυν\beta, 0)\etaμ\omega\etaμ\theta = \\ & = (-\eta\mu\alpha\sigmaυν\beta\sigmaυν\omega - \sigmaυν\alpha\sigmaυν\beta\etaμ\omega\sigmaυν\theta + \etaμ\beta\etaμ\omega\etaμ\theta, \\ & \quad , -\eta\mu\alpha\etaμ\beta\sigmaυν\omega - \sigmaυν\alpha\etaμ\beta\etaμ\omega\sigmaυν\theta - \sigmaυν\beta\etaμ\omega\etaμ\theta, \\ & \quad , \sigmaυν\alpha\sigmaυν\omega - \etaμ\alpha\etaμ\omega\sigmaυν\theta) = (A_3, B_3, \Gamma_3) \end{aligned}$$

Η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$A_3x + B_3y + \Gamma_3z = 0$$

Εάν μας ζητείται να διέρχεται και από ένα σημείο τότε η σταθερά Δ_3 βρίσκεται από την γνωστή διαδικασία.



.....