<u>**Μάθημα 4ο**</u>

<u>Παραδείγματα</u>

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι εξισώσεις μιας ευθείας που περνά από το σημείο (1,2,0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\bar{a} = (2,1,3)$

Η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας σε διανυσματική μορφή είναι

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1,2,0) + t(2,1,3) = (1+2t, 2+t, 3t)$$

Σε συμμετρική μορφή η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$x(t) \equiv x = 1 + 2t \Rightarrow t = \frac{x-1}{2}$$
$$y(t) \equiv y = 2 + t \Rightarrow t = y - 2$$
$$z(t) \equiv z = 3t \Rightarrow t = \frac{z}{3}$$

Αφού τα πρώτα μέλη είναι ίσα σημαίνει ότι θα είναι και τα δεύτερα άρα η ζητούμενη συμμετρική μορφή είναι

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι εξισώσεις τις ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (-2,1,3) και (4,2,-2)

Η διανυσματική εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι

$$\begin{aligned} \bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) &= (-2,1,3) + t(4-(-2), 2-1, (-2)-3) = \\ &= (-2+6t, 1+t, 3-5t) \end{aligned}$$

Η συμμετρική μορφή της εξίσωσης της ζητούμενης ευθείας είναι

$$\frac{x+2}{6} = \frac{-1+y}{1} = \frac{z-3}{-5}$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περνά από τα σημεία ((1,2,0), (0,1,3) και (1,0,1)

Είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + y + 2z + 7 = 0$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας η οποία είναι η τομή δύο επιπέδων με εξισώσεις

$$\begin{aligned} &2x + 3y - 3z - 4 = 0 \\ &x + 2y - z + 3 = 0 \end{aligned}$$

Για να βρούμε τις εξισώσεις τις παραπάνω ευθείας ξεκινάμε να βρούμε αυτήν που είναι πιο εύκολη να βρεθεί. Λύνουμε τις δύο παραπάνω εξισώσεις ως προς x και y

$$\begin{aligned} &2x + 3y = 3z + 4 \\ &x + 2y = z - 3 \end{aligned}$$

Είναι

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \;\; , \;\; D_x = \begin{vmatrix} 3z+4 & 3 \\ z-3 & 2 \end{vmatrix} = 3z + 17 \;\; , \;\; D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3z+4 \\ 1 & z-3 \end{vmatrix} = -z - 10$$

Επομένως η λύση είναι

$$\begin{aligned} &x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = 3z + 17 \\ &y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = -(z + 10) \end{aligned}$$

Θέτοντας z = t βρίσκουμε την διανυσματική μορφή της εξίσωσης της ευθείας είναι

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3t + 17, -(t + 10), t)$$

Η παραμετρική μορφή της εξίσωσης της ευθείας είναι

$$\begin{aligned} &x(t) = 3t + 17 \\ &y(t) = -(t + 10) \\ &z(t) = t \end{aligned}$$

Η συμμετρική μορφή είναι

$$\frac{x-17}{3} = \frac{10-y}{1} = \frac{z}{1}$$

Παράδειγμα 5

Βρείτε τις διανυσματικές εξισώσεις των δύο ευθειών που περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις σε συμμετρική μορφή

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-5}{4} \quad , \quad \frac{x+2}{-3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-3}{2}$$

και στην συνέχεια εξετάστε εάν τέμνονται.

Οι διανυσματικές εξισώσεις των δύο ευθειών βρίσκονται ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία δηλαδή

$$\frac{x+5}{2} = t \Rightarrow x = 2t-5 \quad , \quad \frac{x+2}{-3} = t \Rightarrow x = -3t-2$$
$$\frac{y-5}{1} = t \Rightarrow y = t+5 \quad , \quad \frac{y-5}{1} = t \Rightarrow y = t+5$$
$$\frac{z-5}{4} = t \Rightarrow z = 4t+5 \quad , \quad \frac{z-3}{2} = t \Rightarrow z = 2t+3$$

Οι διανυσματικές εξισώσεις των δύο ευθειών είναι

$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (2t-5, t+5, 4t+5)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_2(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (-3t-2, t+5, 2t+3)$$

Για να δούμε εάν οι δύο ευθείες τέμνονται σχηματίζουμε το σύστημα

$$2t-5 = -3t-2$$
$$t+5 = t+5$$
$$4t+5 = 2t+3$$

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη εξίσωση επαληθεύεται δια οποιαδήποτε τιμή του t. Η πρώτη και η τρίτη εξίσωση γράφονται

$$5t = 3$$
$$2t = -2$$

Το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο γιατί δεν υπάρχει τιμή της μεταβλητής t που να το ικανοποιεί άρα οι δύο ευθείες δεν τέμνονται.

Παράδειγμα 6

Βρείτε την γωνία μεταξύ των δύο ευθειών με διανυσματικές εξισώσεις

$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (6t+1, -3t-2, 6t+4)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_2(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3t-2, 6t+3, -2t-4)$$

Οι παραπάνω διανυσματικές εξισώσεις γράφονται σαν

$$\bar{r}_1 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_1(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1,-2,4) + t(6,-3,6)$$
$$\bar{r}_2 : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}_2(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (-2,3,-4) + t(3,6,-2)$$

Επομένως η πρώτη ευθεία περνά από το σημείο (1, -2, 4) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (6, -3, 6) και η δεύτερη περνά από το σημείο (-2,3,-4) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (3,6,-2). Επομένως η γωνία των δύο ευθειών ισούται με την γωνία των δύο διανυσμάτων δηλαδή

$$\omega = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\langle(6,-3,6),(3,6,-2)\rangle}{\sqrt{6^2+(-3)^2+6^2}\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}\right) = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-12}{9+7}\right) = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{12}{17}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega = 45^0{,}1$$

Παράδειγμα 8

Να βρεθεί η αλγεβρική και η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου που περνά από τα σημεία (1,1,1), (1,2,3) και (3,3,3).

Η αλγεβρική εξίσωση του επιπέδου βρίσκεται από την ανάπτυξη της παρακάτω ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2x + 4y - 2z = 0$$

Για να βρούμε την διανυσματική εξίσωση του επιπέδου αρκεί να βρούμε δύο διανύσματα που κείνται σε αυτό. Τα διανύσματα αυτά είναι τα

$$\bar{a} = (1,2,3) - (1,1,1) = (0,1,2)$$
$$\bar{b} = (3,3,3) - (1,1,1) = (2,2,2)$$

Τα παραπάνω δύο διανύσματα έχουν κοινή αρχή το σημείο με συντεταγμένες (1,1,1). Επομένως η ζητούμενη διανυσματική εξίσωση του επιπέδου είναι

$$\bar{r}_p : \Re^2 \to \Re^3 : (u,v) \to \bar{r}_p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (1,1,1) + u\bar{a} + v\bar{b} =$$
$$= (1+2v, 1+u+2v, 2+2u+2v)$$

Παράδειγμα 9

Δίδεται ένα επίπεδο με αλγεβρική εξίσωση 5x + y + 2z + 7 = 0. Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου που περνά από την αρχή των αξόνων του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (x, y, z) και είναι παράλληλο σε αυτό.

Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα με συντεταγμένες (5, 1, 2) είναι κάθετο στο επίπεδο που μας δόθηκε. Για το επίπεδο που μας ζητείται γνωρίζουμε μόνο ένα σημείο που περνά. Άρα πρέπει να βρούμε δύο διανύσματα που να ανήκουν σε αυτό για να κατασκευάσουμε την ζητούμενη διανυσματική εξίσωση. Έστω

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

δύο διανύσματα που ανήκουν στο επίπεδο που αναζητάμε. Τότε επειδή το αναζητηθέν επίπεδο είναι παράλληλο προς το αρχικό θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\langle (5,1,2), (a_1, a_2, a_3) \rangle = 0 \Rightarrow 5a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$
$$\langle (5,1,2), (b_1, b_2, b_3) \rangle = 0 \Rightarrow 5b_1 + b_2 + 2b_3 = 0$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα σύστημα δύο εξισώσεων έξι αγνώστους επομένως δεν έχει μονότιμη λύση. Στην πρώτη σχέση θέτουμε $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_2 = 2$ οπότε προκύπτει ότι $\alpha_3 = -1$. Για την δεύτερη σχέση θέτουμε $b_1 = 2$ και $b_2 = 0$ οπότε προκύπτει ότι $b_3 = -5$. Επομένως έχουμε ότι

$$\bar{a} = (0,2,-1) \ , \ \bar{b} = (2,0,-5)$$

Τα παραπάνω δύο διανύσματα δεν είναι συγραμμικά άρα η ζητούμενη διανυσματική εξίσωση είναι

$$\bar{r}_p : \Re^2 \to \Re^3 : (u,v) \to \bar{r}_p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (0,0,0) + u\bar{a} + v\bar{b} =$$
$$= (2v, 2u, -u - 5v)$$

Παράδειγμα 10

Δίδονται δύο επίπεδα με αλγεβρικές εξισώσεις

-2x + 4y – 2z = 0
5x + y + 2z + 7 = 0

Να βρεθεί εάν τα δύο επίπεδα τέμνονται και να υπολογιστεί η γωνία μεταξύ τους.

Για να βρούμε εάν τέμνονται αρκεί να βρούμε τα σημεία του χώρου με συντεταγμένες (x_s , y_s , z_s) τα οποία είναι λύσεις του παραπάνω συστήματος. Επειδή οι άγνωστοι είναι τρεις ενώ οι εξισώσεις είναι μόνο δύο η λύση του παραπάνω συστήματος δεν είναι μονότιμη. Οι άπειρες λύσεις θα βρεθούν θέτοντας ως ελεύθερο άγνωστο την μεταβλητή z. Είναι

$$-2x+4y=2z$$
$$5x+y=-2z-7$$

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-22\ ,\ D_x=\begin{vmatrix}2z & 4\\ -2z-7 & 1\end{vmatrix}=10z+28\ ,\ D_y=\begin{vmatrix}-2 & 2z\\ 5 & -2z-7\end{vmatrix}=-14z+14$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι οι τριάδες

$$(x_s,y_s,z_s)=\left(-\frac{10z+28}{22},\frac{14z-14}{22},z\right),\ z\in\Re$$

Θέτοντας z = t κατασκευάζουμε την παρακάτω διανυσματική συνάρτηση

$$\bar{r}:\Re\to\Re^3:t\to\bar{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=\left(-\frac{10t+28}{22},\frac{14t-14}{22},t\right)=$$
$$=\left(-\frac{28}{22},-\frac{14}{22},0\right)+t\left(-\frac{10}{22},\frac{14}{22},1\right)$$

Από την μορφή της παραπάνω διανυσματικής συνάρτησης παρατηρούμε ότι η τομή των δύο επιπέδων είναι μια ευθεία που περνά από το σημείο (-28/22 , -14/22 , 0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (-10/22 , 14/22 , 1).

Η γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων ισούται με την γωνία μεταξύ δύο καθέτων διανυσμάτων τους. Για το πρώτο επίπεδο ένα κάθετο διάνυσμα είναι το (-2, 4, -2) ενώ για το δεύτερο επίπεδο ένα κάθετο διάνυσμα είναι το (5, 1, 2). Αν ω είναι η γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων τότε

$$\omega=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\langle(-2,4,-2),(5,1,2)\rangle}{\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}\sqrt{5^2+1^2+2^2}}\right)=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-10}{\sqrt{24}\sqrt{30}}\right)\Rightarrow\omega=68^0{,}119$$

Παράδειγμα 11

Δίδεται η ευθεία ε με διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r}:\Re\to\Re^3:t\to\bar{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=(1,2,0)+t(2,0,3)=(1+2t,2,3t)$$

και ένα επίπεδο με εξίσωση 5x + y + 2z + 7 = 0. Να εξεταστεί εάν το επίπεδο και η ευθεία τέμνονται και να βρεθεί η γωνία μεταξύ τους.

Από την διανυσματική εξίσωση της ευθείας παρατηρούμε ότι η ευθεία περνά από το σημείο (1,2,0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (2,0,3). Επίσης παρατηρούμε ότι

$$5 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 0 + 7 = 14$$

επομένως το σημείο (1,2,0) δεν ανήκει στο επίπεδο. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε εάν υπάρχει άλλο σημείο της ευθείας που να ανήκει στο επίπεδο. Εάν ναι τότε θα επαληθεύει την εξίσωση του επιπέδου. Είναι

$$5(1+2t)+2+2(3t)+7=0 \Rightarrow 16t+14=0 \Rightarrow t=-\frac{14}{16}$$

Άρα η κοινό σημείο της ευθείας ε και του επιπέδου έχει συντεταγμένες

$$\left(1-2\frac{14}{16},2,-3\frac{14}{16}\right)=\left(-\frac{12}{16},2,-\frac{42}{16}\right)=\left(-\frac{3}{4},2,-\frac{21}{8}\right)$$

Η γωνία μεταξύ της ευθείας ε και του επιπέδου είναι η συμπληρωματική γωνία μεταξύ της ευθείας ε και ενός κάθετου διανύσματος του επιπέδου. Ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο έχει συντεταγμένες (5, 1, 2) άρα εάν ω είναι η γωνία μεταξύ της ευθείας ε και του επιπέδου τότε

$$90^0-\omega=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\langle(5,1,2),(2,0,3)\rangle}{\sqrt{25+1+4}\sqrt{4+9}}\right)=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{16}{\sqrt{30}\sqrt{13}}\right)\Rightarrow\omega=54^0,114$$

……………………