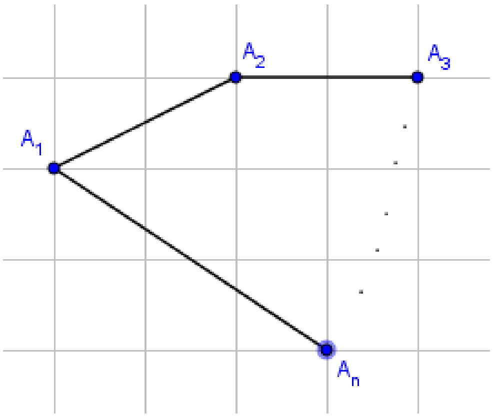
Παραδείγματα στο επίπεδο

Παράδειγμα Πρώτο

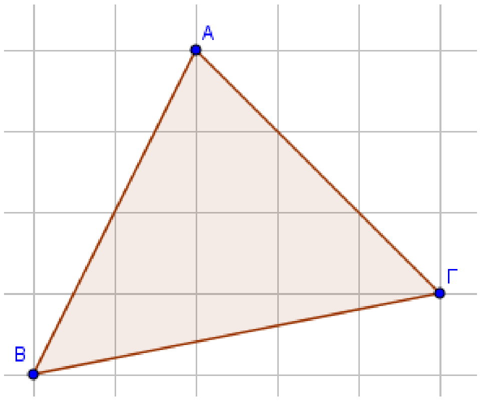
Εμβαδόν απλού πολυγώνου με βάση τις συντεταγμένες του. Έστω ένα απλό πολύγωνο με κορυφές $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, …, $A_n = (x_n, y_n)$.

Σχέση του Albrecht Ludwig Friedrich Meister (1769): Το εμβαδόν ενός απλού πολυγώνου δίδεται από την παρακάτω σχέση

$$E = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}\right|$$



Ειδική περίπτωση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν ενός τριγώνου με κορυφές Α = (3, 5), Β = (1, 1) και Γ = (6, 2) με την σχέση του Meister.



Είναι

$$E = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{3} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right|$$

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\|$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με

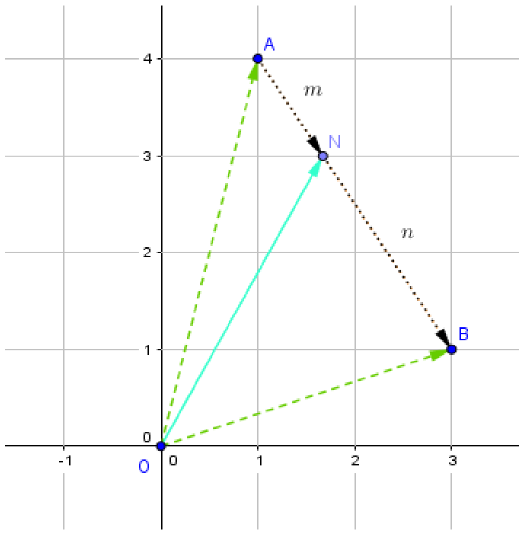
$$E = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|$$

<u>Παράδειγμα Δεύτερο</u>

Δίδονται οι συντεταγμένες δύο σημείων A και B πάνω στο επίπεδο

A = (1, 4) , B = (3, 1)

Έστω το ευθύγραμμο τμήμα AB. Να γραφούν οι σχέσεις οι οποίες δίδουν τις συντεταγμένες ενός σημείου N το οποίο χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα σε λόγο m : n.



Η εκφώνηση μας λέει ότι το διάνυσμα AN έχει μέτρο m και το διάνυσμα NB έχει μέτρο n. Επομένως

$$\overline{AB} = \overline{AN} + \overline{NB}$$
$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

και το μέτρο του διανύσματος AB ισούται με m + n. Είναι

$$\overline{ON} = \overline{OA} + \overline{AN} = \overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{m}{m+n}(\overline{OB} - \overline{OA}) \Rightarrow$$

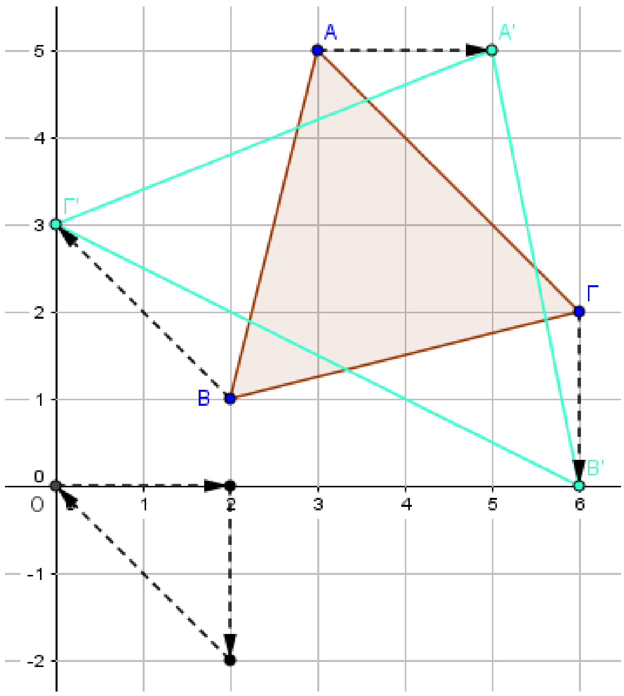
$$\Rightarrow \overline{ON} = \frac{n\overline{OA} + m\overline{OB}}{m+n}$$

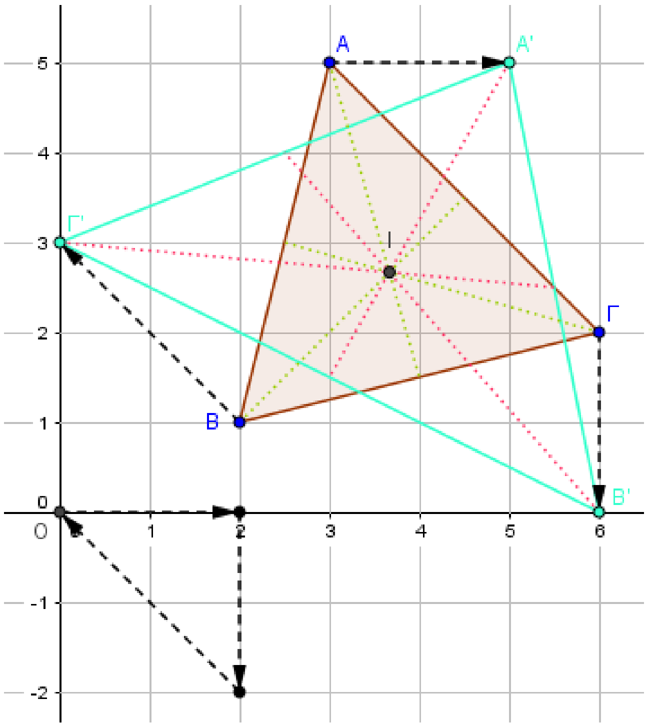
<u>Παράδειγμα Τρίτο</u>

Να βρεθεί το κέντρο βάρους (βαρύκεντρο) σε ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο πλευράς α και στην συνέχεια να κατασκευαστεί από αυτό ένα τρίγωνο με ίδιο κέντρο βάρους.

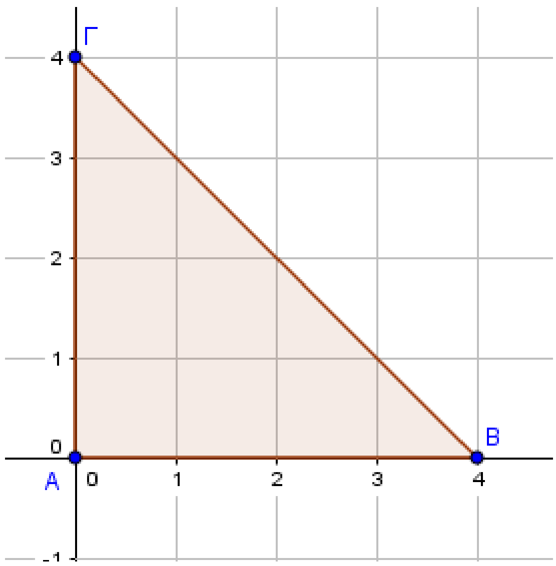
Για την κατασκευή θα στηριχτούμε στην παρακάτω ιδιότητα: Έστω τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι κορυφές μετατοπίζονται κατά τα διανύσματα $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ έτσι ώστε $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$

Τότε προκύπτει ένα τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ το οποίο έχει το ίδιο κέντρο βάρους με το αρχικό.





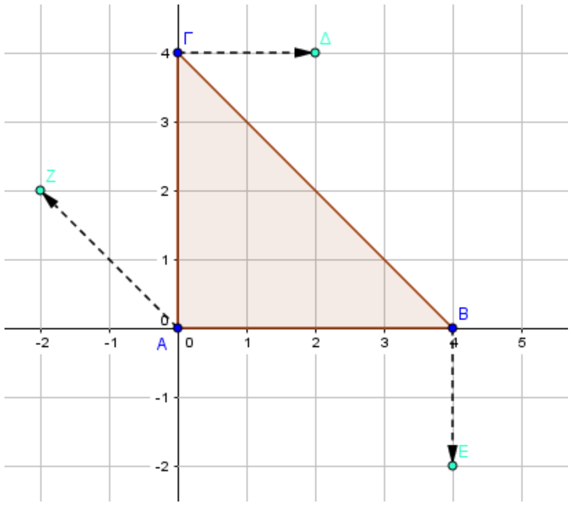
Συγκεκριμένα έστω ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές μήκους 4 εκατοστά. Οι συντεταγμένες των κορυφών του είναι Α = (0, 0), Β = (4, 0) , Γ = (0, 4).



Θα μετατοπίσουμε τις κορυφές του κατά τα διανύσματα

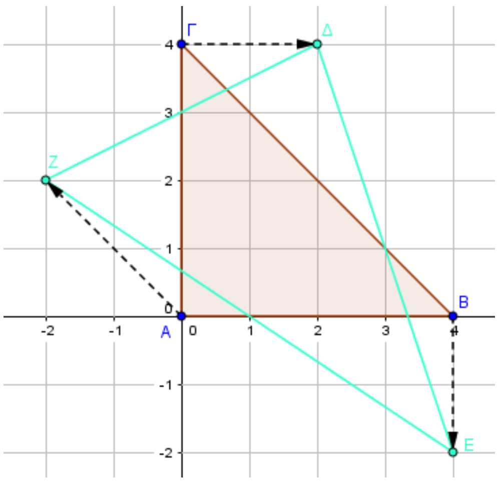
$\bar{a}=(2,0)$, $\bar{b}=(0,-2)$, $\bar{c}=(-2,2)$

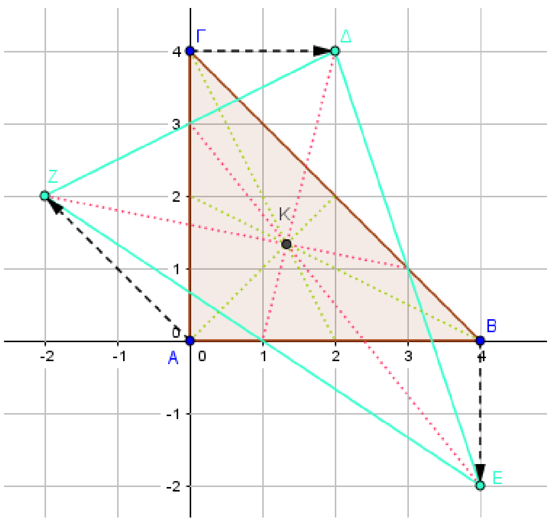
Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι το άθροισμα τους είναι το μηδενικό διάνυσμα.



Το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ένα τρίγωνο το οποίο έχει το ίδιο βαρύκεντρο με το αρχικό. Οι συντεταγμένες των κορυφών του είναι

Δ = (2, 4)   ,   Ε = (4, -2)   ,   Ζ = (-2, 2)





<u>Παράδειγμα Τέταρτο</u>

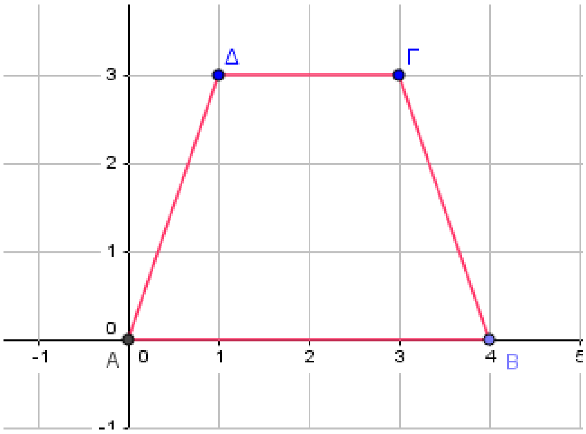
Δίδεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ του οποίου οι συντεταγμένες των κορυφών είναι

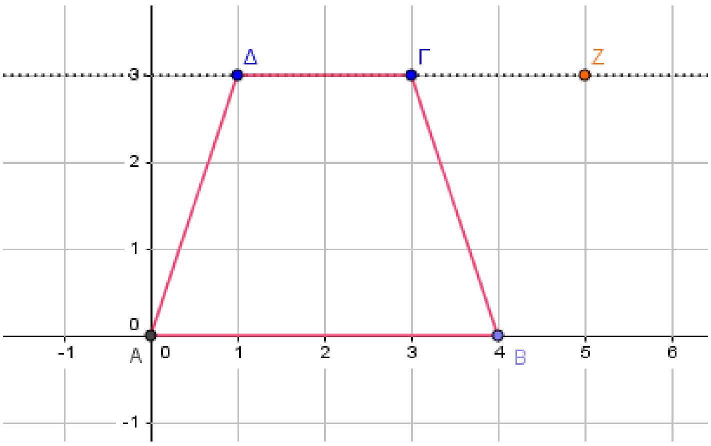
Α = (0, 0), Β = (4, 0), Γ = (3, 3) , Δ = (1, 3).

Να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου και να διαιρεθεί σε δύο ισεμβαδικά τετράπλευρα.

Το εμβαδόν του τραπεζίου υπολογίζεται από τον τύπο του Meinster (άσκηση). Για να χωρίσουμε το παραπάνω τραπέζιο σε δύο ισεμβαδικά τετράπλευρα κάνουμε το εξής

Το πρώτο βήμα είναι να σχεδιάζουμε την ευθεία ΓΔ και να επιλέξουμε ένα σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΔΖ = ΑΒ.



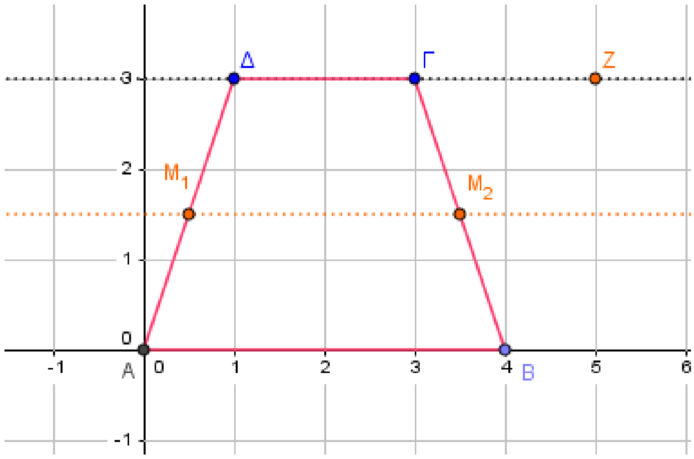


Οι συντεταγμένες του σημείου Ζ είναι (5, 3).

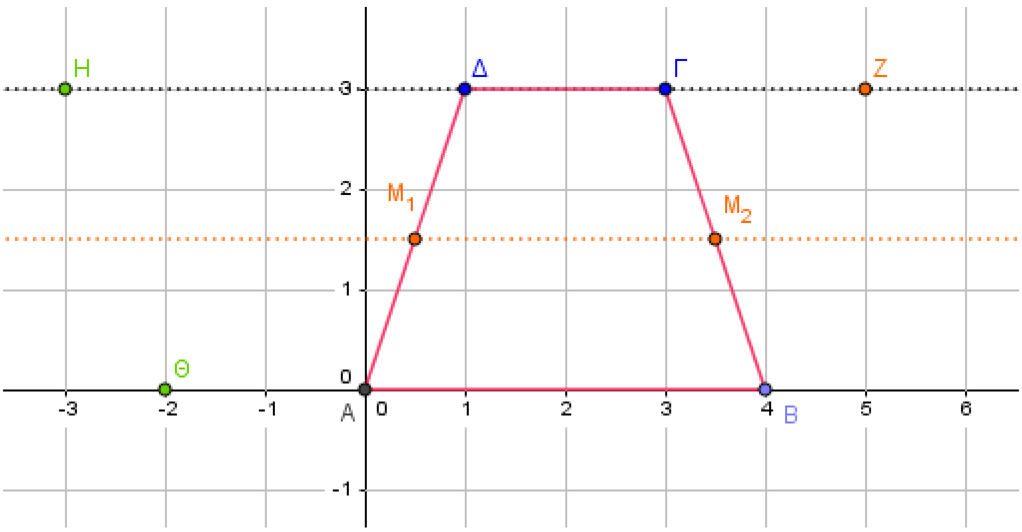
Το δεύτερο βήμα είναι να σχεδιάσουμε την ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν M_1 , M_2 είναι τα μέσα τους τότε οι συντεταγμένες τους ισούνται με

$$\overline{AM_1} = \frac{\overline{A\Delta}}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad , \quad \overline{AM_2} = \frac{\overline{AB} + \overline{A\Gamma}}{2} = \frac{(4,0)+(3,3)}{2} = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Η ευθεία που υλοποιούν είναι η y = 3/2.



Το τρίτο βήμα είναι να υλοποιήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ = ΑΒ πάνω στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Γ και Δ και ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΘ πάνω στον άξονα x έτσι ώστε ΑΘ = ΓΔ.

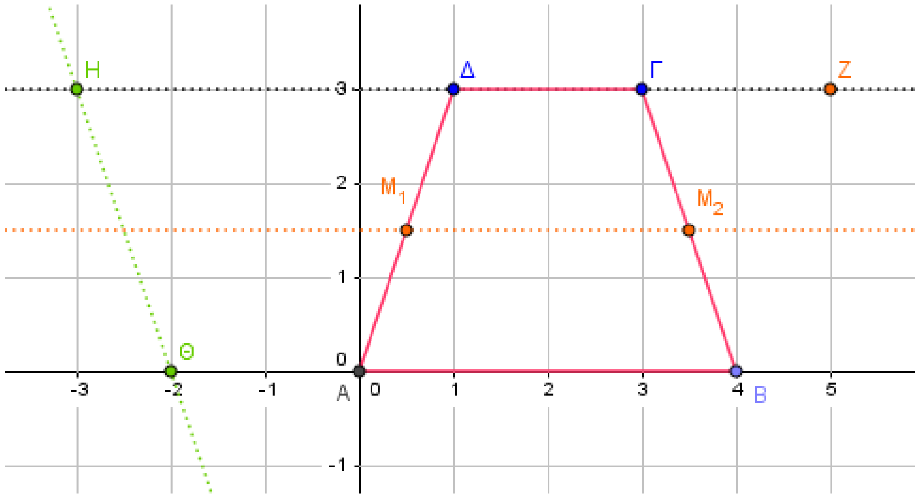


Οι συντεταγμένες των σημείων Ζ, Η, και Θ ισούνται με

Ζ = (5, 3),   Θ = (-2, 0),   Η = (-3, 3).

Το τέταρτο βήμα είναι να σχεδιάσουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Η και Θ και να σχηματίσουμε το παραλληλόγραμμο ΒΓΗΘ. Η εξίσωση της ευθείας αυτής είναι

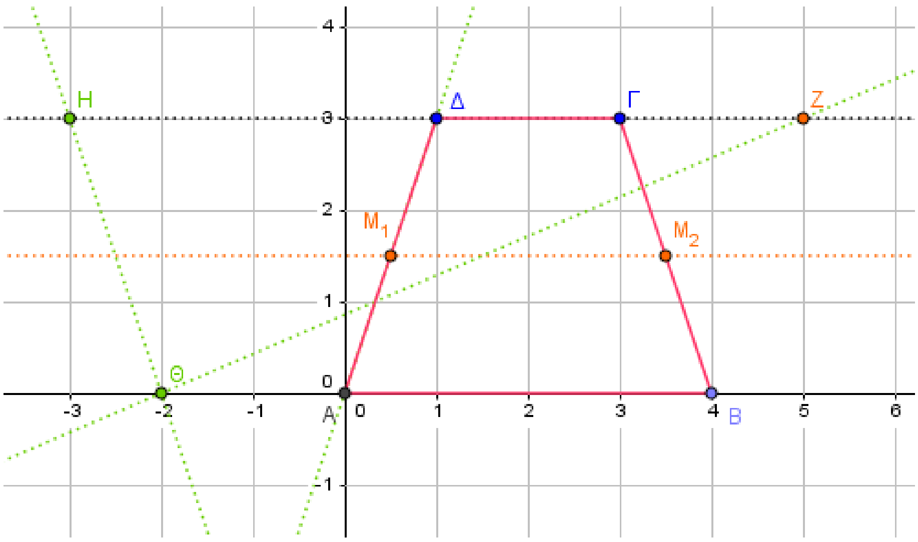
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y + 6 = 0$$



Το πέμπτο βήμα είναι να σχεδιάσουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Θ και Ζ και να βρούμε το σημείο τομής της με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Δ. Οι εξισώσεις των δύο ευθειών είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + y = 0$$

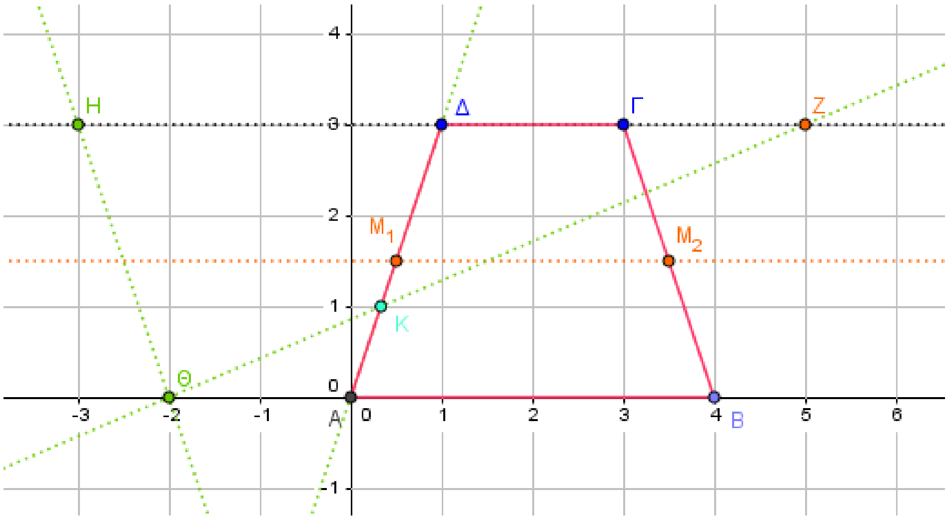
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + 7y - 6 = 0$$



Έστω Κ το σημείο τομής των δύο παραπάνω ευθειών. Οι συντεταγμένες του βρίσκονται λύνοντας το σύστημα

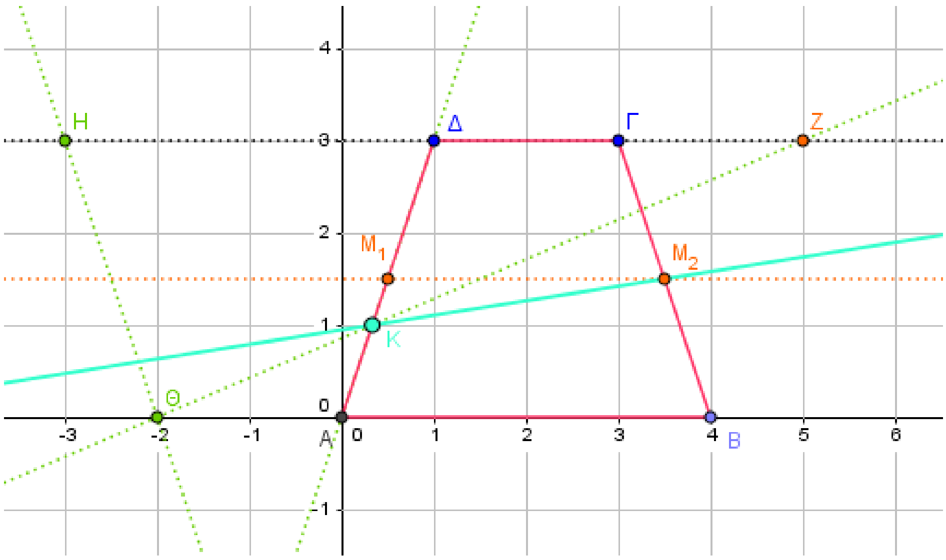
$$\begin{aligned} -3x + y &= 0 \\ -3x + 7y &= 6 \end{aligned}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος δίδει Κ = (1/3, 1).



Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ και M_2 είναι η ευθεία που χωρίζει το τραπέζιο σε δύο ισεμβαδικά τετράπλευρα. Η εξίσωση της είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{19}{6}y - 3 = 0$$



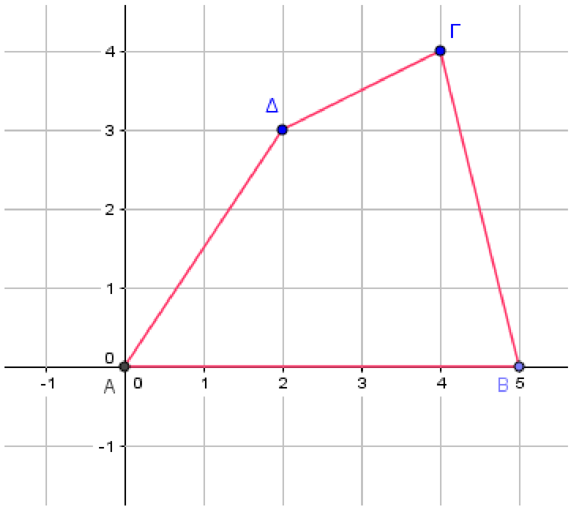
Τα τετράπλευρα $ΚΜ_2ΓΔ$ και $ΑΒΜ_2Κ$ έχουν το ίδιο εμβαδόν. (4,5 το καθένα και 9 το τραπέζιο).

Παράδειγμα Πέμπτο

Δίδονται οι συντεταγμένες των κορυφών ενός κυρτού τετράπλευρου

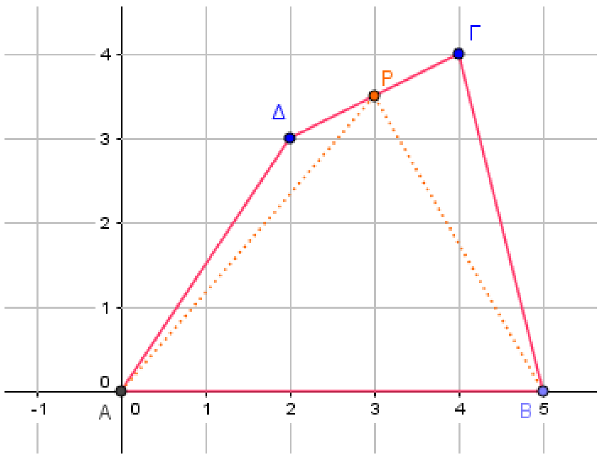
Α = (0, 0), Β = (0, 5), Γ = (4, 4), Δ = (2, 3)

Να διαιρεθεί το τετράπλευρο αυτό σε δύο ισεμβαδικά τετράπλευρα.



Το πρώτο βήμα είναι να επιλέξουμε ένα σημείο Ρ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ και να σχεδιάσουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΑ και ΡΒ αντίστοιχα. Επιλέγουμε το σημείο Ρ να είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ. Οι συντεταγμένες του είναι

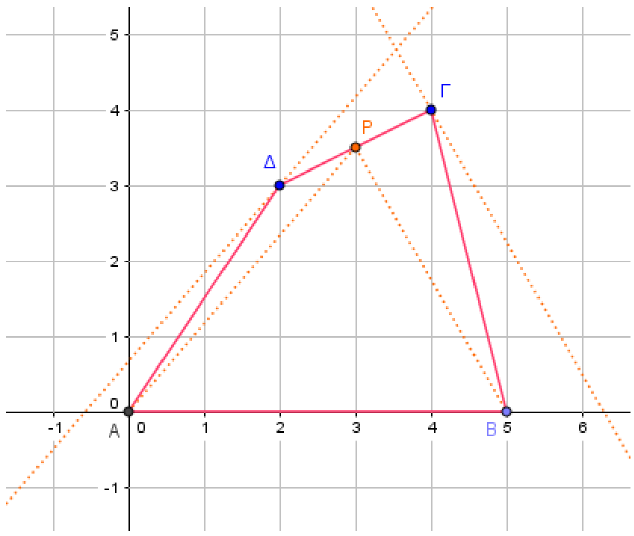
$$\overline{AP} = \frac{\overline{A\Gamma} + \overline{A\Delta}}{2} = \frac{(2{,}3)+(4{,}4)}{2} = (3,\ 3{,}5)$$



Το δεύτερο βήμα είναι να σχεδιάσουμε ευθείες που διέρχονται από τα σημεία Γ και Δ και οι οποίες είναι παράλληλες προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΒ και ΡΓ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις των ευθειών αυτών είναι

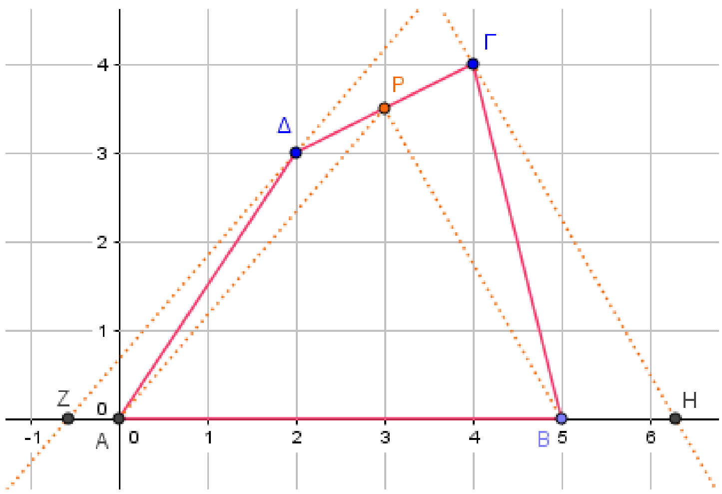
$$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 \\ 3-5 & 3{,}5-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y-4 \\ -2 & 3{,}5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3{,}5x + 2y - 22 = 0 \quad (\text{παράλληλη στο PB})$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 \\ 3 & 3{,}5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3{,}5x - 3y + 2 = 0 \quad (\text{ παράλληλη στο PA})$$



Το τρίτο βήμα είναι να βρούμε τα σημεία τομής των δύο παραπάνω ευθειών με τον άξονα x.
Οι συντεταγμένες των σημείων αυτών είναι

Z = (-0,57 , 0)   H = (6,29, 0).

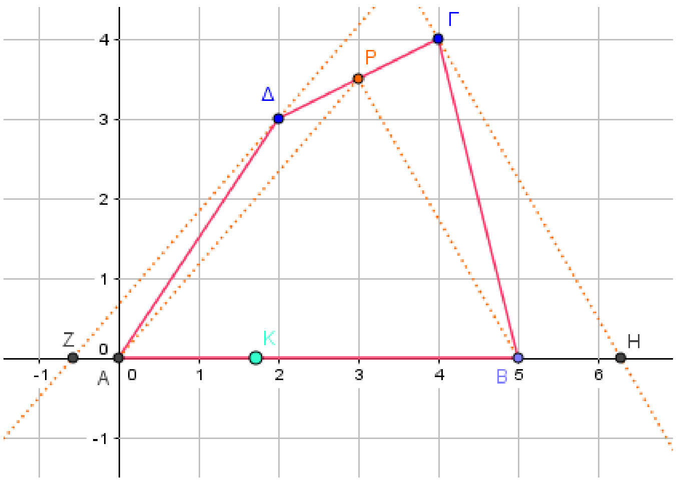


Το τέταρτο βήμα είναι να βρούμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ZH και να το χωρίσουμε σε τρία ίσα μέρη. Το μήκος του είναι

ZH = d(Z, H) = 6,29 + 0,57 = 6,86

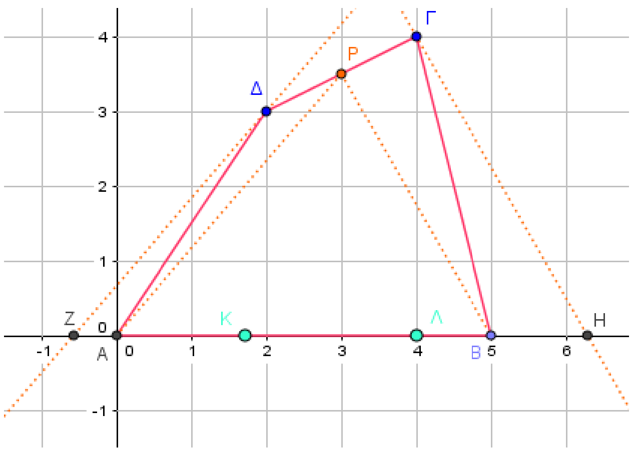
Έστω K και Λ τα ζητούμενα σημεία. Οι συντεταγμένες του σημείου K είναι

$$\overline{AK} = \frac{2\overline{AZ} + \overline{AH}}{3} = \frac{2(-0{,}57,\ 0) + 6{,}29,\ 0)}{3} = (1{,}716, 0)$$



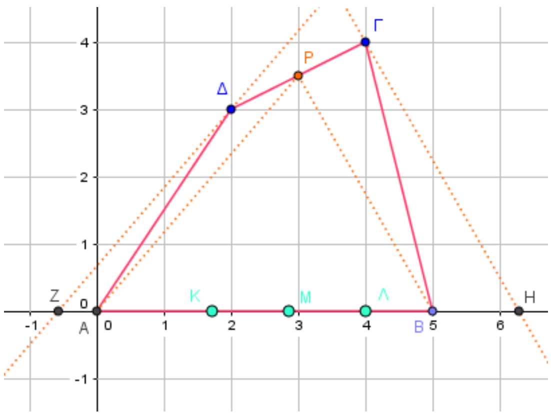
Οι συντεταγμένες του σημείου Λ είναι

$$\overline{A\Lambda} = \frac{\overline{AK} + \overline{AH}}{2} = \frac{(1{,}7166,\ 0) + (6{,}29,\ 0)}{2} = (4{,}003,\ 0)$$

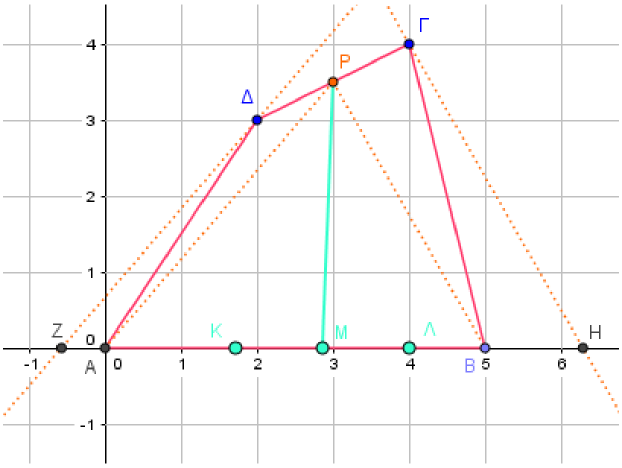


Το τελευταίο βήμα είναι να σχεδιάσουμε το τρίγωνο ΡΚΛ και την διάμεσο του από την κορυφή Ρ. Έστω Μ το σημείο τομής της διαμέσου αυτής με τον άξονα x. Οι συντεταγμένες του σημείου Μ ισούνται με

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AK} + \overline{A\Lambda}}{2} = \frac{(1{,}716,\ 0) + (4{,}003,\ 0)}{2} = (2{,}859,\ 0)$$



Τα τετράπλευρα ΡΜΖΔ και ΡΜΒΓ είναι τα ζητούμενα ισεμβαδικά τετράπλευρα.



…………………………..