§ 9-ΣΥΣΤΗΜΑ CRAMER-ΛΥΣΗ ΑΛΥΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ 4

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \boldsymbol{x+\lambda y-z=2} \\ \boldsymbol{2x-y+\lambda z=5} \\ \boldsymbol{x+10y-6z=\mu} \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ, μ .

Λύση

$$detA=\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\2&-1&\lambda\\1&10&-6\end{vmatrix}=(\Gamma1-\Gamma3)=\begin{vmatrix}0&\lambda-10&5\\2&-1&\lambda\\1&10&-6\end{vmatrix}=(\Gamma2-2\Gamma3)=\begin{vmatrix}0&\lambda-10&5\\0&-21&\lambda+12\\1&10&-6\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\lambda-10&5\\-21&\lambda+12\end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda+12)+5\cdot21=\lambda^2+12\lambda-10\lambda-120+105=$$
$$=\lambda^2+2\lambda-15=(\boldsymbol{\lambda-3})(\boldsymbol{\lambda+5})$$

1) Άρα για $\lambda\neq3$ $και$ $\lambda\neq-5$ το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την εξής:

$$detA_1=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\5&-1&\lambda\\\mu&10&-6\end{vmatrix}=(\Sigma1+2\Sigma3)=\begin{vmatrix}0&\lambda&-1\\5+2\lambda&-1&\lambda\\\mu-12&10&-6\end{vmatrix}$$
$$=-\lambda\cdot\begin{bmatrix}5+2\lambda&\lambda\\\mu-12&-6\end{bmatrix}+(-1)\cdot\begin{bmatrix}5+2\lambda&-1\\\mu-12&10\end{bmatrix}$$
$$=-\lambda[(5+2\lambda)(-6)-\lambda\cdot(\mu-12)]-[(5+2\lambda)\cdot10+(\mu-12)]$$
$$=-\lambda[-30-12\lambda-\lambda\cdot\mu+12\cdot\lambda]-(50+20\lambda+\mu-12)$$
$$=30\lambda+\cancel{12\lambda^2}+\lambda^2\mu\cancel{-12\lambda^2}-(20\lambda+\mu+38)=\lambda^2\mu+30\lambda-20\lambda-\mu-38$$
$$=\lambda^2\mu+10\lambda-\mu-38$$

$$detA_2=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&5&\lambda\\1&\mu&-6\end{vmatrix}=(\Sigma3+\Sigma1)=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&5&\lambda+2\\1&\mu&-5\end{vmatrix}=(\Sigma2-2\Sigma1)=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&\lambda+2\\1&\mu-2&-5\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1&\lambda+2\\\mu-2&-5\end{vmatrix}=(-5)-(\lambda+2)\cdot(\mu-2)=-5-(\lambda\mu-2\lambda+2\mu-4)$$
$$=-5-\lambda\mu+2\lambda-2\mu+4=-1-\lambda\mu+2\lambda-2\mu$$

$$detA_3=\begin{vmatrix}1&\lambda&2\\2&-1&5\\1&10&\mu\end{vmatrix}=\left(\Sigma3\to\Sigma3-2\Sigma1\right)=\begin{vmatrix}1&\lambda&0\\2&-1&1\\1&10&\mu-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\10&\mu-2\end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix}2&1\\1&\mu-2\end{vmatrix}$$
$$=-\mu+2-10-\lambda(2\mu-4-1)=-\mu-8-\lambda(2\mu-5)=-\mu-8-2\lambda\mu+5\lambda$$

$$x=\frac{detA_1}{detA}=\frac{\lambda^2\mu+10\lambda-\mu-38}{(\lambda-3)(\lambda+5)}$$

$$y=\frac{detA_2}{detA}=\frac{-1-\lambda\mu+2\lambda-2\mu}{(\lambda-3)(\lambda+5)}$$

$$z=\frac{detA_3}{detA}=\frac{-\mu-8-2\lambda\mu+5\lambda}{(\lambda-3)(\lambda+5)}$$

2) Για $\lambda = 3$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + \lambda y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x - y + \lambda z = 5} \\ \boldsymbol{x + 10y - 6z = \mu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x + 3y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x - y + 3z = 5} \\ \boldsymbol{x + 10y - 6z = \mu} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \mu \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma2-2\Gamma1]{\Gamma3-\Gamma1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & \mu-2 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma3+\Gamma2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-1 \end{array}\right]$$

- Αν $\mu = 1, \delta\eta\lambda. \mu - 1 = 0$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τις εξής:

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{7})\cdot\Gamma2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma1-3\Gamma2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Άρα $\begin{cases} x = \frac{17}{7} - \frac{8}{7}k \\ y = -\frac{1}{7} + \frac{5}{7}k \end{cases}, k \in R$

- Αν $\mu \neq 1$ τότε το (Σ) είναι αδύνατο!

3) Για $\lambda = -5$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + \lambda y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x - y + \lambda z = 5} \\ \boldsymbol{x + 10y - 6z = \mu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x - 5y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x - y - 5z = 5} \\ \boldsymbol{x + 10y - 6z = \mu} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \mu \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\Gamma2-2\Gamma1]{\Gamma3-\Gamma1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 15 & -5 & \mu-2 \end{array}\right] \xrightarrow{(\frac{1}{3})\cdot\Gamma2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 15 & -5 & \mu-2 \end{array}\right] \xrightarrow{(\frac{1}{5})\cdot\Gamma3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 3 & -1 & \mu-2/5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma3-\Gamma2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\mu-11}{15} \end{array}\right]$$

- Αν $\frac{3\mu-11}{15} = 0, \ \delta\eta\lambda. \mu = \frac{11}{3}$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τις εξής:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(\frac{1}{3})\Gamma2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma1+5\Gamma2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{23}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Άρα $\begin{cases} x = \frac{23}{9} + \frac{8}{3}k \\ y = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}k \end{cases}, k \in R$

- Αν $\frac{3\mu-11}{15} \neq 0,\ \delta\eta\lambda.\, \mu \neq \frac{11}{3}$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο!