



# Γραμμική Άλγεβρα

## 11. Διαγωνοποίηση Πίνακα

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

# Ορισμοί

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_{n \times n}$  είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα  $D \in M_{n \times n}$ .

Λέμε ότι ο τετραγωνικός  $n \times n$  πίνακας  $A$  είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα  $D$ , αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας  $P \in M_{n \times n}$  τέτοιος ώστε:

$$P^{-1}AP = D$$

Σημ: Σημαντική εφαρμογή της διαγωνοποίησης είναι ο υπολογισμός δυνάμεων!

# Ορισμός

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_{n \times n}$  είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας  $P \in M_{n \times n}$  τέτοιος ώστε:

$$P^{-1}AP = D \text{ ή αλλιώς } A = PDP^{-1}$$

όπου  $D$  διαγώνιος πίνακας  $D \in M_{n \times n}$ .

Ο πίνακας  $P$  διαγωνοποιεί τον  $A$ .

Ο πίνακας  $D$  είναι ο όμοιος διαγώνιος του  $A$ .

# Ιδιότητες ομοίων πινάκων

Αν  $A, B \in M_{n \times n}$  όμοιοι πίνακες, δηλ. υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας  $P \in M_{n \times n}$  τέτοιος ώστε

$$P^{-1}AP = B, \text{ τότε } \begin{cases} \det A = \det B \\ X_A(\lambda) = X_B(\lambda) \\ B^k = P^{-1}A^kP, \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

## Απόδειξη 1

$$A) P^{-1}AP = B \Rightarrow \det(P^{-1}AP) = \det B \Rightarrow$$

$$(\det P^{-1}) \cdot (\det A) \cdot (\det P) = \det B \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\det P} \cdot (\det A) \cdot (\det P) = \det B \Rightarrow \det A = \det B.$$

- Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει!

Δηλαδή, αν δύο πίνακες  $A, B \in M_{n \times n}$  έχουν  $\det A = \det B$ , αυτό δεν σημαίνει ότι είναι και όμοιοι!!!!

## Απόδειξη 1

$$\Gamma) P^{-1}AP = B \Rightarrow (P^{-1}AP)^k = B^k \Rightarrow$$

$$\bullet (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdot \dots \cdot (P^{-1}AP) = B^k \Rightarrow$$

$$\bullet P^{-1}A(P P^{-1})A(P P^{-1}) \dots (P P^{-1})AP = B^k \Rightarrow$$

$$\bullet P^{-1}AIAI \dots IAP = B^k \Rightarrow$$

$$\bullet P^{-1}AA \dots AP = B^k \Rightarrow P^{-1}A^kP = B^k$$

## Παρατήρηση

Αφού  $X_A(\lambda) = X_B(\lambda)$ , αυτό σημαίνει ότι οι δυο πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

## Πρόταση

Αν ο  $A \in M_{n \times n}$  είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε ο  $P$  που τον διαγωνοποιεί έχει ως στήλες  $n$  γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του  $A$  και ο διαγώνιος  $D$  έχει στη διαγώνιό του τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του  $A$ , δηλαδή:

$$P = [\vec{x}_1 | \vec{x}_2 | \dots | \vec{x}_n] \text{ και } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  είναι τοποθετημένες στον  $D$  με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον  $P$ .

Και επομένως ισχύει:  $A = PDP^{-1}$

# Βήματα για τη διαγωνοποίηση πινάκων

- 1) Δημιουργία του πίνακα  $[A - \lambda I_n]$ , ο οποίος προκύπτει από τον  $A$  με την αφαίρεση της παραμέτρου  $\lambda$  από την κύρια διαγώνιο.
- 2) Υπολογισμός της  $\det(A - \lambda I_n) = X_A(\lambda)$ , δηλ. του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του  $A$  ως προς  $\lambda$ .
- 3) Επίλυση της εξίσωσης  $X_A(\lambda) = 0$ , δηλ. της  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ . Οι διαφορετικές ρίζες  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho$  (με  $\rho \leq n$ ) αυτού του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του  $A$ .
- 4) Βρίσκουμε μια βάση  $B_{\lambda_1}$  του χώρου  $V_{\lambda_1}(A)$ .  
Βρίσκουμε μια βάση  $B_{\lambda_2}$  του χώρου  $V_{\lambda_2}(A)$   
⋮  
Βρίσκουμε μια βάση  $B_{\lambda_\rho}$  του χώρου  $V_{\lambda_\rho}(A)$



## Βήματα για τη διαγωνοποίηση πινάκων (συνέχεια)

5) Θεωρούμε το σύνολο  $B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \dots \cup B_{\lambda_p}$ .

6) Αν το  $B$  έχει  $n$  διανύσματα τότε ο  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος, αλλιώς όχι.

7) Αν ο  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή αν  $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$  τότε:

$$P = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \end{array} \right] \text{ και } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Πίνακας με στήλες τις συνιστώσες των ιδιοδιανυσμάτων

Όπου οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  είναι τοποθετημένες στον  $D$  με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον  $P$ .

## Παράδειγμα 1

Δίνεται ο πίνακας  $A \in M_{3 \times 3}$  με  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ .

A) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $X_A(\lambda)$  και τις ιδιοτιμές του  $A$ .

B) Να δείξετε ότι ο  $A$  διαγωνοποιείται και να βρείτε έναν πίνακα  $P$  που τον διαγωνοποιεί καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο  $D$ .

Γ) Να βρείτε τον  $A^{80}$ .

Δ) Να υπολογίσετε άμεσα την ορίζουσα  $\det A$  με χρήση του  $X_A(\lambda)$  που βρήκατε.

## Παράδειγμα 1α-λύση

Α) χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $X_A(\lambda)$  και τις ιδιοτιμές του  $A$  :

$$\begin{aligned} X_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 4 \\ 2 & 0 - \lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (3 - \lambda) \cdot [-\lambda(3 - \lambda) - 4] - 2[2(3 - \lambda) - 8] + 4(4 + 4\lambda) = \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 2(-2\lambda - 2) + 16(\lambda + 1) = \\ &= (3 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 4) + 20(\lambda + 1) = (\lambda + 1)[(3 - \lambda)(\lambda - 4) + 20] = \\ &= (\lambda + 1)(-\lambda^2 + 7\lambda + 8) = \boxed{-(\lambda + 1)^2(\lambda - 8)}. \end{aligned}$$

Δηλαδή:  $X_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8.$

• Για να βρούμε τις ιδιοτιμές θέτουμε:

$$X_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda + 1)^2(\lambda - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \text{ (διπλη)} \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}$$

• Επομένως οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι οι εξής:  $\lambda_1 = -1$  (διπλη) και  $\lambda_2 = 8.$

## Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

Β) Για να δούμε αν ο  $A$  διαγωνοποιείται, πρέπει να βρούμε μια βάση  $B_{\lambda_1}$  του ιδιόχωρου του  $A$  ως προς κάθε ιδιοτιμή του  $V_{\lambda_1}(A)$ , άρα πρέπει να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα για κάθε ιδιοτιμή.

1) Για την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = -1$  έχουμε :

$$(A - \lambda_1 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow [A - (-1)I_3]\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1 \\ \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - \gamma_1}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \frac{1}{4}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$$

Γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος

$y, z$  ελεύθερες μεταβλητές

$x$  βασική μεταβλητή

Επίλυση ομογενούς συστήματος

## Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

- Για την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = -1$  έχουμε λοιπόν:

$$(A - \lambda_1 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_1 \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{cases}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}.$$

- Άρα ο ιδιοχώρος  $V_{-1}(A)$  έχει διανύσματα της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}.$$

Και μια βάση  $B_{-1}$  του ιδιοχώρου  $V_{-1}(A)$  είναι:

$$B_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

## Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

2) Για την ιδιοτιμή  $\lambda_2 = 8$  έχουμε :

$$(A - \lambda_2 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow [A - 8 \cdot I_3] \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 2\gamma_2]{\gamma_1 \rightarrow -\frac{1}{5}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 2 & -8 & 2 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$$

Γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος

$x, y$  βασικές μεταβλητές

$z$  ελεύθερη μεταβλητή

Για την ιδιοτιμή  $\lambda_2 = 8$  έχουμε λοιπόν:

$$(A - \lambda_2 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_2 \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \frac{1}{2}z, z \in R. \\ z \end{cases}$$

Λύση ομογενούς συστήματος

## Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

Άρα ο ιδιοχώρος  $V_8(A)$  έχει διανύσματα της μορφής:  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}.$

Και μια βάση  $B_8$  του ιδιοχώρου  $V_8(A)$  είναι:

$$B_8 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Εύρεση του συνόλου } B = B_{-1} \cup B_8 = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Άρα το  $B$  έχει 3 διανύσματα και άρα ο  $A$  έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Επειδή  $n = 3$  συνεπάγεται ότι ο  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

## Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

Εύρεση διαγώνιου πίνακα :

- Άρα ο πίνακας  $P$  που διαγωνοποιεί τον  $A$  είναι ο εξής:
- Ο αντίστοιχος διαγώνιος όμοιος με τον  $A$  είναι ο εξής:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ και } A = P \cdot D \cdot P^{-1} .$$

Ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα του  $B$ .

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ο πίνακας με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο τοποθετημένες με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον  $P$ .



## Παράδειγμα 1γ-λύση (συνέχεια)

Γ) Υπολογισμός του  $A^{80}$ :  $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

- Γνωρίζουμε ότι  $A^{80} = P \cdot D^{80} \cdot P^{-1}$ .

Επομένως:

$$D^{80} = \begin{bmatrix} (-1)^{80} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{80} & 0 \\ 0 & 0 & 8^{80} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{240} \end{bmatrix}$$

- Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Αν  $A, B \in M_{n \times n}$  όμοιοι πίνακες δηλ.

$P^{-1}AP = B$  τότε ισχύει

$$B^k = P^{-1}A^kP, \forall k \in \mathbb{N}$$

Αν  $D$  διαγώνιος πίνακας η νιοστή δύναμη του  $D$  είναι ίση με τον πίνακα με υψωμένα εις την  $n$  μόνο τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου.

## Παράδειγμα 1γ-λύση (συνέχεια)

Επομένως: •  $A^{80} = P \cdot D^{80} \cdot P^{-1} =$

$$\bullet = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{240} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \dots =$$

$$A^{80} = \begin{bmatrix} \frac{5 + 2^{242}}{9} & \frac{2^{241} - 2}{9} & \frac{2^{242-4}}{9} \\ \frac{2^{241} - 2}{9} & \frac{2^{240} + 8}{9} & \frac{2^{241} - 2}{9} \\ \frac{2^{242} - 4}{9} & \frac{2^{241} - 2}{9} & \frac{5 + 2^{242}}{9} \end{bmatrix}$$

## Παράδειγμα 1δ-λύση (συνέχεια)

### Δ) Υπολογισμός $\det A$

Α' τρόπος:  $\det A = X_A(0) = -0^3 + 6 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + 8 = 8$ . Άρα  $\det A = 8$ .

Β' τρόπος:

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την ορίζουσα του  $A$  ως **γινόμενο των ιδιοτιμών**:

•  $A, D$  ομοιοι πίνακες  $\Rightarrow \det A = \det D \xrightarrow[D \text{ διαγώνιος}]{} \Rightarrow$

$\det D = \text{γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων} \Rightarrow \det D = \text{γινόμενο των ιδιοτιμών του } A!$

Άρα  $\det A = (-1) \cdot (-1) \cdot 8 = 8$  

**ΠΡΟΣΟΧΗ!** Την ιδιοτιμή  $\lambda = -1$  η οποία είναι διπλή (έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2) την χρησιμοποιούμε 2 φορές! Αντίστοιχα, αν είχαμε μια τριπλή ιδιοτιμή θα τη χρησιμοποιούσαμε τρεις φορές, κ.ο.κ.

## Παράδειγμα 2 (για λύση)

- Δίνεται ο πίνακας  $A \in M_{3 \times 3}$  με  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ .
- Α) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $X_A(\lambda)$  και τις ιδιοτιμές του  $A$ .
- Β) Να δείξετε ότι ο  $A$  διαγωνοποιείται και να βρείτε έναν πίνακα  $P$  που τον διαγωνοποιεί καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο  $D$ .
- Γ) Να υπολογίσετε άμεσα την ορίζουσα  $\det A$  με χρήση του  $X_A(\lambda)$  που βρήκατε.

## Παράδειγμα 2α-Λύση

Α) χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $X_A(\lambda)$  και ιδιοτιμές του  $A$  :

$$\begin{aligned} \bullet X_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2 - \lambda) \cdot [(1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2] = (2 - \lambda) \cdot (4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2) \\ &= (2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (2 - \lambda) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3). \end{aligned}$$

$$X_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

• Για να βρούμε τις ιδιοτιμές θέτουμε:

$$X_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ (διπλη)} \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι οι  $\lambda_1 = 2$  (διπλη) και  $\lambda_2 = 3$ .

Συνεχίστε την επίλυση του 2β και 2γ όπως στο παράδειγμα 1.

## Πρόταση

- Ο πίνακας  $A \in M_{n \times n}$  είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν έχει  $n$  γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

- Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\dim V_{\lambda_1}(A) + \dim V_{\lambda_2}(A) + \cdots + \dim V_{\lambda_\rho}(A) = n$$

- Όπου όλες  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho$  με  $\rho \leq n$  όλες οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του  $A$ .

## Παρατήρηση

- Έχουμε δει ότι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- Άρα αν ο  $A \in M_{n \times n}$  έχει  $n$  διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές τότε διαγωνοποιείται.

## ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Αν όμως κάποια ιδιοτιμή είναι διπλή, τριπλή κ.τ.λ. τότε το αν ο  $A$  διαγωνοποιείται ή όχι εξαρτάται από το πόσα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα μπορούμε να βρούμε συνολικά για όλες τις ιδιοτιμές.