Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

8ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Αρχή Μεταφοράς (υπενθύμιση): Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in A$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Η f είναι συνεχής στο x.

(2) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ από στοιχεία του A με την ιδιότητα $x_n \to x$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.

Άσκηση 1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x > 3 \\ -x, & x \leq 3. \end{cases}$$

Δείξτε τα εξής:

(i) Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο 3.

(ii) Για κάθε $x \neq 3$ η f είναι συνεχής στο x.

Λύση.

(i) Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 3 αρκεί να **βρούμε** μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $x_n \to 3$ και $f(x_n) \not\to f(3)$.

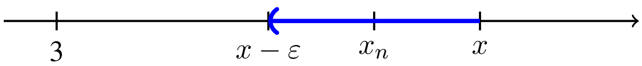
Επιλέγουμε $x_n = 3 + 1/n$, $n \geq 1$. Τότε $x_n > 3$ και άρα $f(x_n) = \left(3 + \dfrac{1}{n}\right)^2 + 1$ για κάθε $n \geq 1$. Έχουμε

$$\left(3 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 \longrightarrow (3+0)^2 + 1 = 10.$$

Από την άλλη $f(3) = -3$. Επομένως $f(x_n) \not\to f(3)$.

(ii) Έστω x. Από την Αρχή Μεταφοράς αρκεί να δείξουμε ότι **για κάθε** ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $x_n \to x$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.

Θεωρούμε ότι $x > 3$. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ τυχαία ακολουθία με $x_n \to x$. Αφού $x > 3$ θα έχουμε $x_n > 3$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, δείτε το πιο κάτω σχήμα:



Για ένα αρκετά μικρό ε έχουμε $x - \varepsilon > 3$ και άρα ισχύει $x_n > x - \varepsilon > 3$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $f(x_n) = x_n^2 + 1$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και επομένως $f(x_n) \to x_n^2 + 1 \to x^2 + 1 = f(x)$.

Η περίπτωση $x < 3$ αντιμετωπίζεται ομοίως. Απλώς παρατηρούμε ότι αν $x_n \to x$ θα έχουμε $x_n < 3$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ δεν έχει συνεχή επέκταση στο 0, δηλαδή για κάθε συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x) = f(x) = 1/x$ για κάθε $x \neq 0$, η F δεν είναι συνεχής στο 0.

Λύση.
Θεωρούμε μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F|(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = f$. Παίρνουμε την ακολουθία $x_n = 1/n$, $n \geq 1$. Τότε $x_n \to 0$ και $F(x_n) = f(x_n) = n \to +\infty$. Αφού $F(0) \in \mathbb{R}$ έχουμε $F(x_n) \not\to F(0)$.

Επομένως υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ πραγματικών αριθμών με $x_n \to 0$ και $F(x_n) \not\to F(0)$. Από την Αρχή Μεταφοράς η F δεν είναι συνεχής στο 0.

Άσκηση 3.

(i) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ μια ακολουθία **από φυσικούς αριθμούς** η οποία συγκλίνει σε κάποιο a. Δείξτε ότι υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $x_n = a$, δηλαδή $x_n = a$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε τις αποστάσεις $|x_{n+1} - x_n|$.

(ii) Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Λύση.
(i) Αφού $x_n \to a$ θα έχουμε $x_{n+1} - x_n \to a - a = 0$ και άρα $|x_{n+1} - x_n| \to 0$. Ειδικότερα για $\varepsilon = 1/2$ θα έχουμε $|x_{n+1} - x_n| < 1/2 < 1$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. (Μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε $\varepsilon \leq 1$.) Αν η απόσταση μεταξύ δύο φυσικών αριθμών είναι μικρότερη της μονάδας τότε αυτοί οι φυσικοί είναι αναγκαστικά ίσοι μεταξύ τους.

Αφού η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ αποτελείται από φυσικούς αριθμούς και $|x_{n+1} - x_n| < 1$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε και $x_n = x_{n+1}$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $x_n = x_{n+1}$. Με άλλα λόγια
$$x_{n_0} = x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \cdots = x_n = \ldots$$
Από την άλλη $x_n \to a$ άρα $x_n = a$ για κάθε $n \geq n_0$.

(ii) Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Έστω $a \in \mathbb{N}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ μια ακολουθία από φυσικούς αριθμούς με $x_n \to a$. Από το (i) θα έχουμε $x_n = a$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και άρα $f(x_n) = f(a)$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $f(x_n) \to f(a)$.

Άσκηση 4.

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h(x) = \sqrt{|\sin x|}.$$
Βρείτε δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ και $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $h = g \circ f$.

(ii) Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι συνεχείς τότε και η συνάρτηση $h = g \circ f$ είναι επίσης συνεχής, όπου τα X, Y και Z είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Λύση.
(i) Παίρνουμε $f : \mathbb{R} \to [0, \infty) : f(x) = |\sin x|$ και $g : [0, \infty) \to \mathbb{R} : g(y) = \sqrt{y}$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|\sin x|) = \sqrt{|\sin x|} = h(x).$$
Άρα $h = g \circ f$.

Σχόλιο: Όταν σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τοποθετούμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της στον οριζόντιο άξονα που δηλώνεται συνήθως με $x'x$ και γι' αυτό έχει επικρατήσει κατά κάποιο τρόπο η χρήση του συμβόλου x για να δηλώσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της. Στην περίπτωση της πιο πάνω g θα μπορούσαμε να συμβολίσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή πάλι με x, αλλά είναι πιο εύκολο στην κατανόηση να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο σύμβολο, π.χ. το y. Απλώς πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην περίπτωση που μας ζητηθεί να σχεδιάσουμε τη γραφική παράστασή της. Τότε το y, δηλαδή η ανεξάρτητη μεταβλητή, πρέπει να τοποθετηθεί στον οριζόντιο άξονα.

Γενικά δεν υπάρχει κάποιος μαθηματικός λόγος που να μας *επιβάλλει* τη χρήση ενός συγκεκριμένου συμβόλου για να δηλώσουμε μια μεταβλητή, θα μπορούσαμε π.χ. να είχαμε $g(\natural) = \sqrt{\natural}$ για κάθε $\natural \in [0, \infty)$. Φυσικά *δεν* μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύμβολο στο οποίο έχουμε ήδη αποδώσει το νόημα *κάποιου άλλου* μαθηματικού αντικειμένου που έχουμε ήδη ορίσει, π.χ. δεν θα μπορούσαμε να είχαμε τα $\emptyset$, ∞ στη θέση του $\natural$.

(ii) Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Έστω $x \in X$ και μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ από στοιχεία του X με $x_n \to x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $h(x_n) \to h(x)$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x και $x_n \to x$, έχουμε από την Αρχή Μεταφοράς ότι $f(x_n) \to f(x)$. Η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $y_n = f(x_n)$ για κάθε $n \geq 1$, αποτελείται από στοιχεία του Y και ικανοποιεί $y_n \to y$ όπου $y = f(x) \in Y$. Αφού η g είναι συνεχής στο y από την Αρχή Μεταφοράς έχουμε $g(y_n) \to g(y)$. Άρα

$$h(x_n) = (g\circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \ \longrightarrow \ g(y) = g(f(x)) = (g\circ f)(x) = h(x).$$

Άσκηση 5. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν ακολουθίες $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ από ρητούς και από άρρητους αριθμούς αντίστοιχα έτσι ώστε $q_n \to x$ και $x_n \to x$.

Υπόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $a < b$ υπάρχει ρητός q και άρρητος y με $a < q < b$ και $a < y < b$.

Λύση.

Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $n \geq 1$. Εφαρμόζουμε την υπόδειξη στους πραγματικούς αριθμούς $x - 1/n < x + 1/n$. Τότε υπάρχει ένας ρητός αριθμός q_n με $x - 1/n < q_n < x + 1/n$ και ένας άρρητος x_n με $x - 1/n < x_n < x + 1/n$.

Αφού το n είναι τυχαίο έχουμε δύο ακολουθίες $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ από ρητούς και άρρητους αριθμούς αντίστοιχα. Προφανώς $x \pm 1/n \to x$ και άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $q_n \to x$ και $x_n \to x$.

Σχόλιο: Στα συνηθισμένα παραδείγματα μια συνάρτηση είναι συνεχής "σχεδόν σε όλα τα σημεία" του πεδίου ορισμού της. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις με "πάρα πολλά" σημεία ασυνέχειας.

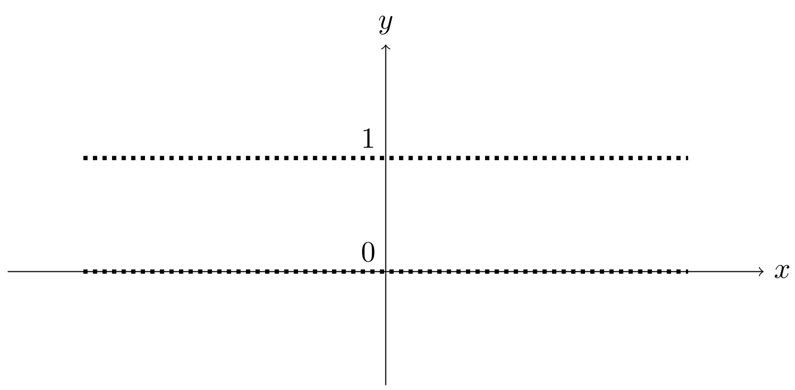
Άσκηση 6 (Συνάρτηση Dirichlet)**.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας!

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 5.

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Dirichlet μπορούμε να τη σχεδιάσουμε μόνο κατά προσέγγιση.



Λύση.

Θεωρούμε ένα $x \in \mathbb{R}$. Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x αρκεί να βρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $x_n \to x$ και $f(x_n) \not\to f(x)$.

1η περίπτωση: $x \in \mathbb{Q}$. Τότε $f(x) = 1$. Από την Άσκηση 5 υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ από άρρητους αριθμούς με $x_n \to x$. Αφού $x_n \notin \mathbb{Q}$ θα έχουμε $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \geq 1$, επομένως $f(x_n) \not\to 1 = f(x)$.

2η περίπτωση: $x \notin \mathbb{Q}$. Τότε $f(x) = 0$. Από την Άσκηση 5 υπάρχει ακολουθία $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ από ρητούς αριθμούς με $q_n \to x$. Αφού $q_n \in \mathbb{Q}$ θα έχουμε $f(q_n) = 1$ για κάθε $n \geq 1$, επομένως $f(q_n) \not\to 0 = f(x)$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι η εξίσωση $\cos(x^2) = x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, \pi/2)$.

Λύση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R} : f(x) = \cos(x^2) - x$. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε

$$f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0 \quad \text{και} \quad f(\sqrt{\pi/2}) = \cos(\pi/2) - \sqrt{\pi/2} = -\sqrt{\pi/2} < 0.$$

Άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει ένα $\xi \in (0, \pi/2)$ με $f(\xi) = 0$, δηλαδή $\cos(\xi^2) = \xi$.

Σχετικά με τη μοναδικότητα γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi/2]$. Αν έχουμε $x_1, x_2 \in [0, \pi/2]$ με $x_1 < x_2$ τότε $x_1^2 < x_2^2$ και άρα $\cos(x_2^2) < \cos(x_1^2)$. Επομένως

$$f(x_2) = \cos(x_2^2) - x_2 < \cos(x_1^2) - x_2 < \cos(x_1^2) - x_1 = f(x_1)$$

και άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi/2]$. Ειδικότερα η f είναι 1-1 σε αυτό το διάστημα. Αν έχουμε λοιπόν $\cos(x^2) = x$ για κάποιο $x \in [0, \pi/2]$, τότε $f(x) = 0 = f(\xi)$ και άρα $x = \xi$. Με άλλα λόγια η εξίσωση $\cos(x^2) = x$ έχει μοναδική λύση στο $[0, \pi/2]$.

Σχόλιο: Μπορεί να αποδειχθεί ότι η η εξίσωση $\cos(x^2) = x$ έχει μοναδική λύση σε όλο το $\mathbb{R}$ ως εξής. Αν $x > \pi/2$ τότε $x > 1$ και άρα $\cos(x^2) - x < \cos(x^2) - 1 < 0$. Αν $x < -\pi/2$ τότε $x < -1$ και άρα $\cos(x^2) - x > -1 - x > 0$. Τέλος αν $x \in [-\pi/2, 0)$ τότε $\cos(x^2) > 0 > x$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $\cos(x^2) \neq x$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (\pi/2, +\infty)$.