Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

7ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Σημειώσεις: 1) Με την ορολογία "*εξετάστε μια σειρά ως προς τη σύγκλιση*" εννοούμε να εξεταστεί αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει, χωρίς να ασχοληθούμε με την απόλυτη σύγκλιση. Όταν λέμε "*εξετάστε μια σειρά ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση*" εννοούμε να εξεταστεί αν η σειρά συγκλίνει απολύτως ή συγκλίνει απλά χωρίς να συγκλίνει απολύτως ή αποκλίνει.

2) Είναι συχνό το φαινόμενο να εφαρμόζονται *πάνω από ένα κριτήρια σύγκλισης* σε μια σειρά. Επομένως ακόμα και αν μια άσκηση υποδεικνύει τη χρήση π.χ. του Κριτηρίου της Ρίζας, εσείς ενδεχομένως να μπορείτε να τη λύσετε με τη χρήση π.χ. του Κριτηρίου του Λόγου.

Άσκηση 1 (Κριτήριο Σύγκρισης)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}\ .$$

Υπόδειξη: Υπενθυμίζουμε την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Λύση.
Σχετικά με την πρώτη σειρά έχουμε

$$\left|\frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n}\right| \leq \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}\ .$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n}$ συγκλίνει απολύτως και άρα και κανονικά.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$, έχουμε

$$\frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\ .$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Στην τρίτη σειρά παρατηρούμε ότι $3n-2 < 3n$ και επομένως $\frac{1}{3n-2} > \frac{1}{3n}$ για κάθε $n \geq 1$. Αν συνέκλινε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ τότε από το Κριτήριο Σύγκρισης θα συνέκλινε και σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$. Επομένως θα συνέκλινε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι άτοπο.

Άσκηση 2 (Κριτήριο Λόγου d' Alembert)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}\ .$$

Λύση.
Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^4} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} \longrightarrow 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ συγκλίνει. (Για την ακρίβεια συγκλίνει απολύτως αλλά μια και η ακολουθία αποτελείται από θετικούς όρους δεν κάνει διαφορά τι από τα δύο θα πούμε.)

Στη δεύτερη

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \longrightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ συγκλίνει.

Σχετικά με την τρίτη σειρά

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{5^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{5^n \cdot n!} \\
&= \frac{5^{n+1}}{5^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= 5\cdot(n+1)\cdot \frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n} \\
&= 5\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= 5\cdot\frac{1}{(1+1/n)^n} \longrightarrow \frac{5}{e} > 1.
\end{aligned}$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\cdot n!}{n^n}$ αποκλίνει.

Άσκηση 3 (Κριτήριο Ρίζας)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}.$$

Λύση.
Εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ συγκλίνει.

Στη δεύτερη

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ αποκλίνει.

Σχετικά με την τελευταία σειρά

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{e^{-n^2}} = e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n \longrightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ συγκλίνει.

Άσκηση 4 (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-5}{2^n}\,.$$

Υπόδειξη: Στην πρώτη σειρά θεωρήστε την ακολουθία $b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$. Ακολουθήστε παρόμοιο συλλογισμό στις άλλες δύο σειρές.

Λύση.

Σχετικά με την πρώτη σειρά θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}\,,\quad b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2},\quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}\cdot n^2 = \frac{n^5+n^2}{4n^5-3n+1} = \frac{1+1/n^3}{4-3/n^4+1/n^5} \longrightarrow \frac{1}{4} > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, επομένως συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}$.

Προχωράμε στη δεύτερη σειρά. Θέτουμε

$$a_n = \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}\,,\quad b_n = \frac{n^3}{n^{7/2}} = \frac{1}{n^{1/2}},\quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}\cdot n^{1/2} = \frac{n^{7/2}+2n^{3/2}+n^{1/2}}{n^{7/2}+2} = \frac{1+2/n^2+1/n^3}{1+2/n^{7/2}} \longrightarrow \frac{1+0}{1+0} = 1 > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ αποκλίνει, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}$ αποκλίνει επίσης.

Στην τελευταία σειρά θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{4^n-5}{2^n}\,,\quad b_n = \frac{4^n}{2^n} = 2^n,\quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{4^n-5}{2^n}\cdot 2^{-n} = \frac{2^{2n}\cdot 2^{-n}-5\cdot 2^{-n}}{2^n} = \frac{2^n-5\cdot 2^{-n}}{2^n} = 1-\frac{5}{4^n} \longrightarrow 1 > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-5}{2^n}$ αποκλίνει επίσης.

2ος τρόπος για την τελευταία σειρά: Παρατηρούμε ότι

$$\frac{4^n-5}{2^n} = 2^n - \frac{5}{2^n} \geq 1$$

για κάθε $n \geq \mathbf{2}$. (Μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή.) Άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n = \dfrac{4^n-5}{2^n}$, $n \geq 1$ δεν συγκλίνει στο 0 (για την ακρίβεια συγκλίνει στο $+\infty$) και επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

Άσκηση 5. Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{3^n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}\,,$$

ως προς τη σύγκλιση. Με "cos" εννούμε τη συνάρτηση συνημίτονο.

Λύση.

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 < 1$$

επομένως από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ συγκλίνει.

Στη δεύτερη σειρά παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{1+\cos(n)}{3^n}\right| \leq \frac{1+|\cos(n)|}{3^n} \leq \frac{1+1}{3^n} = \frac{2}{3^n}\,,$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα $|x+y| \leq |x|+|y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ συγκλίνει επίσης.

Εφόσον $\left|\dfrac{1+\cos(n)}{3^n}\right| \leq \dfrac{2}{3^n}$ για κάθε $n \geq 1$, από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{3^n}$ συγκλίνει απόλυτα και άρα συγκλίνει και με τη συνήθη έννοια.

Σχετικά με την τρίτη σειρά μπορούμε να εφαρμόσουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με $a_n = \dfrac{1}{4n^2-3}$ και $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq \mathbb{N}^*$.

Παρατηρούμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{4n^2-3}\cdot n^2 = \frac{n^2}{4n^2-3} = \frac{1}{4-3/n^2} \longrightarrow \frac{1}{4} > 0.$$

Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3}$.

β' τρόπος: Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $4n^2-3 \geq n^2$ για κάθε n, (ισοδύναμα $4n^2-n^2 \geq 3$ που ισχύει). Άρα $\dfrac{1}{4n^2-3} \leq \dfrac{1}{n^2}$ για κάθε $n \geq 1$. Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Κριτήριο Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3}$.

Στην τέταρτη σειρά εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας,

$$\sqrt[n]{\frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}} = \frac{5+1/n}{2^2} \longrightarrow \frac{5}{4} > 1$$

επομένως η σειρά αποκλίνει.

Στην τελευταία σειρά έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}\cdot\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{2^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot\left[\frac{n!}{(n+1)!}\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\ &= \frac{4n^2+4n+2n+2}{2(n^2+2n+1)} \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{n^2+2n+1} \\ &= \frac{2+3/n+1/n^2}{1+2/n+1/n^2} \longrightarrow 2 > 1. \end{aligned}$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}$ αποκλίνει.

Άσκηση 6. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

Λύση.

Γνωρίζουμε ότι $\dfrac{1}{n} \to 0$ και συνεπώς $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}} \to 0$. Επιπλέον είναι σαφές ότι $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \geq 1$. Από το Κριτήριο του Leibniz η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ που αποκλίνει. Άρα η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει απολύτως.

Σχετικά με τη δεύτερη σειρά βλέπουμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει.

Άσκηση 7.

(i) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\cdot\pi+\frac{1}{n}\right)$$

δεν συγκλίνει απολύτως. (Στο μάθημα δείξαμε ότι αυτή η σειρά συγκλίνει.)

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\dfrac{2}{\pi}\cdot x \leq \sin x$ για κάθε $x \in [0, \pi/2]$.

(ii) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$$

συγκλίνει.

(iii) Εξετάστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right)$$

ως προς τη σύγκλιση.

Λύση.

(i) Όπως έχουμε παρατηρήσει και στο μάθημα ισχύει

$$\sin\left(n \cdot \pi + \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{n}\right), & n\text{: άρτιος} \\ -\sin\left(\frac{1}{n}\right) & n\text{: περιττός} \end{cases} = (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

και άρα

$$\left|\sin\left(n \cdot \pi + \frac{1}{n}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|$$

για κάθε $n \geq 1$.

Εφαρμόζουμε την ανισότητα $\frac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x$ $\big($για $x \in [0, \pi/2]\big)$ στο $x = \frac{1}{n} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ και έχουμε

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \geq 1$. Επομένως αν η σειρά συνέκλινε απολύτως, από το Κριτήριο Σύγκρισης θα συνέκλινε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$. Άρα θα συνέκλινε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, άτοπο.

(ii) Εφαρμόζουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης για $a_n = \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$ και $b_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$. Έχουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}} \cdot n^2 = \frac{n^2}{2n^2 - \sqrt{n}} = \frac{1}{2 - 1/n^{3/2}} \longrightarrow \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} > 0.$$

Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, προκύπτει ότι συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$.

β' τρόπος: Προσπαθούμε να δείξουμε ότι η ποσότητα $2n^2 - \sqrt{n}$ είναι μεγαλύτερη-ίση κάποιου $k_n \geq 0$ με την ιδιότητα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$ να συγκλίνει. Τότε θα έχουμε $\frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}} \leq \frac{1}{k_n}$ και από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά θα συγκλίνει.

Δοκιμάζουμε $k_n = n^2$:

$$2n^2 - \sqrt{n} \geq n^2 \iff 2n^2 - n^2 \geq \sqrt{n} \iff n^2 \geq \sqrt{n}$$

που ισχύει γιατί $n \geq 1$.

Άρα ισχύει $\frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$ και από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$ συγκλίνει.

(iii) Παρατηρούμε ότι η σειρά δεν είναι τηλεσκοπική - αυτό δεν απαιτείται στη λύση αλλά είναι βοηθητικό. Για να δούμε γιατί δεν είναι τηλεσκοπική ελέγχουμε μερικούς όρους:

$$\begin{aligned} a_1 &: \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \\ a_2 &: \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \\ a_3 &: \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} \\ a_4 &: \frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} \ . \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι δεν προκύπτουν διαγραφές όπως σε ένα τηλεσκοπικό άθροισμα.

Απλοποιούμε την παράσταση,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} &= \frac{\sqrt{n+1}+1-\sqrt{n+1}+1}{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)} \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{2}{n+1-1} \\ &= \frac{2}{n} \ . \end{aligned}$$

Επομένως η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ αποκλίνει.