Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

6ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Άσκηση 1 (Κατανόηση σύγκλισης στα $\pm\infty$)**.** Δίνονται δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n \to +\infty$ και $b_n \to -\infty$. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 1234567890 < a_n\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \leq 17\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n > 1,1\}$$
$$D = \{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n < -9876543210\}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση.

Το σύνολο A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Εξήγηση: αφού $a_n \to +\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 1234567890$ έχουμε $a_n > M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Το σύνολο B είναι πεπερασμένο. Εξήγηση: αφού $a_n \to +\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 17$ θα έχουμε $a_n > M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως υπάρχει $n_0 \geq 1$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n > 17$. Επομένως αν $a_n \leq 17$ πρέπει να έχουμε $n < n_0$, δηλαδή $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n < n_0\}$.

Το σύνολο C είναι πεπερασμένο. Εξήγηση: αφού $b_n \to -\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 12345$ θα έχουμε $b_n < -M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως υπάρχει $n_0 \geq 1$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $b_n < -12345$. Επομένως αν $b_n > 1,1$ θα έχουμε ειδικότερα ότι $b_n \geq -12345$ και άρα $n < n_0$. Προκύπτει ότι $C \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n < n_0\}$.

Το σύνολο D περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Εξήγηση: αφού $b_n \to -\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 9876543210$ θα έχουμε $b_n < -M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2 (Σύγκλιση στα $\pm\infty$ με βάση τον ορισμό)**.**

(i) Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία $a_n = -n^3$ συγκλίνει στο $-\infty$.

(ii) Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα **όχι** κάτω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $-\infty$.

Λύση.

(i) Έστω $M > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n < -M$. Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει $n_0 \geq 1$ με $n_0 > M$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε

$$a_n = -n^3 \leq -n \leq -n_0 < -M.$$

(ii) Έστω $M > 0$. Εφόσον η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ δεν είναι κάτω φραγμένη, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_{n_0} < -M$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε

$$a_n \leq a_{n_0} < -M,$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φθίνουσα. Άρα $a_n \to -\infty$.

Άσκηση 3 (Άλγεβρα Σειρών)**.**

(i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ συγκλίνει αλλά οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν.

(ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει επίσης.

(iii) Δείξτε ότι αν $c\neq 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Λύση.

(i) Θέτουμε $a_n = 1$ και $b_n = -1$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε $a_n + b_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Αν θέσουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$ τότε $s_n = 0+\cdots+0$ (n φορές) και συνεπώς $s_n = 0$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Από την άλλη είναι σαφές ότι $a_n \not\to 0$ και $b_n \not\to 0$, συνεπώς οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν.

Προσοχή: Μη θεωρήσετε ότι η παραπάνω σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ μας οδηγεί σε "απροσδιοριστία του τύπου $0\cdot\infty$". Εδώ δεν υπάρχει καμία απροσδιοριστία: το άπειρο άθροισμα είναι σαφώς ορισμένο ως το όριο της ακολουθίας των πεπερασμένων αθροισμάτων. Αν κάθε πεπερασμένο άθροισμα είναι 0 τότε το όριο της σειράς είναι και αυτό 0.

(ii) Παρατηρούμε ότι $b_n = a_n + b_n + (-1)\cdot a_n$ για κάθε $n \geq 1$. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\cdot a_n$. Επιπλέον αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ συγκλίνει, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n+b_n+(-1)\cdot a_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

συγκλίνει επίσης. (Άθροισμα συγκλινουσών σειρών.)

(iii) Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n$ συγκλίνει τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c^{-1}\cdot(c\cdot a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Άσκηση 4 (Διερεύνηση Σύγκλισης)**.** Εξετάστε ως προς τη σύγλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \text{όπου } |x|\geq 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right].$$

Λύση.

Αν $|x| \geq 1$ τότε $|x^n| = |x|^n \geq 1$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως $x^n \not\to 0$ και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ αποκλίνει. (Μπορεί να δειχθεί σχετικά εύκολα ότι $|x^n| \to +\infty$ όταν $|x| > 1$.)

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}$ συνέκλινε τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-1}\cdot\frac{5}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ θα συνέκλινε επίσης που είναι άτοπο.

Σχετικά με την τρίτη σειρά θέτουμε $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$ και $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Αν ο n είναι άρτιος τότε $a_n = 1+(-1) = 0$ και αν ο n είναι περιττός αριθμός τότε $a_n = -1+1 = 0$. Επομένως $a_n = 0$ για κάθε

$n \geq 1$ και $s_n = a_1 + \cdots + a_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Όπως και στην προτεινόμενη λύση του (i) της Άσκησης 3 η σειρά συγκλίνει στο 0.

Άσκηση 5. Δίνονται $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ και $n \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

και

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k} = \frac{x(1-x^n)}{1-x} .$$

Υπόδειξη: Υπολογίστε $(1-x) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \ldots .$

Λύση.

Σύμφωνα με την υπόδειξη έχουμε

$$\begin{aligned}(1-x) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} x^{k} \\ &= x^0 + x^1 + \cdots + x^{n-1} \\ &\quad\ - (x^1 + \cdots + x^{n-1} + x^n) \\ &= x^0 - x^n \\ &= 1 - x^n .\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$(1-x) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1 - x^n$$

και διαιρώντας με το $1 - x$,

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x} .$$

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k} = x \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = x \cdot \frac{1-x^n}{1-x} .$$

Άσκηση 6 (Εύρεση ορίου σειράς)**.** Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} .$$

Λύση.

Στις πρώτες δύο σειρές χρησιμοποιούμε τον τύπο $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ καθώς και τις ιδιότητες των συγκλινουσών σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n} = -\frac{8}{125} \cdot \frac{-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{8}{125} \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{875}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}-4^{n+2}}{5^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} - \frac{4^2}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} - \frac{16}{5} \cdot \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} - \frac{16}{5} \cdot 4 \\
&= \frac{9}{10} - \frac{64}{5} \\
&= \frac{9-128}{10} = -\frac{119}{10} \ .
\end{aligned}
$$

Η τρίτη σειρά είναι τηλεσκοπική. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \ .$$

Επομένως αν θέσουμε $a_n = \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \\
a_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\
a_3 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \\
\vdots & \qquad \vdots \\
a_n &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \ .
\end{aligned}
$$

Άρα $a_1 + \cdots + a_n = 1 - \dfrac{1}{2n+1} \longrightarrow 1$ και επομένως $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$