Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

3ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Υπενθύμιση ορολογίας:

- Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ *περιέχει σχεδόν όλα τα* $n \in \mathbb{N}$ ακριβώς όταν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n \in A$.
- Συχνά χρησιμοποιείται η ορολογία "*τελικά για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$" αντί της "σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$" - και οι δύο ορολογίες σημαίνουν το ίδιο πράγμα.
- Ένα σύνολο που περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ (ή αλλιώς τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$) λέγεται και *συμπεπερασμένο*. Δείτε το σχόλιο στην Άσκηση 7.

Άσκηση 1. Επιλέξτε Σωστό-Λάθος (χωρίς απόδειξη).

	Σωστό	**Λάθος**
1. Η ακολουθία $a_n = n^3$, $n \geq 1$ είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη.	Σ	Λ
2. Κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι και αύξουσα.	Σ	Λ
3. Μια αύξουσα ακολουθία που δεν είναι σταθερή είναι γνησίως αύξουσα.	Σ	Λ
4. Μια ακολουθία είναι φραγμένη ακριβώς όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη.	Σ	Λ
5. Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη.	Σ	Λ

Λύση.

Δίνουμε τις απαντήσεις μαζί με κάποια σχόλια (τα σχόλια δεν είναι ζητούμενο της άσκησης).

1. **Σ**. Παρατηρούμε ότι $1 \leq n^3 \leq (n+1)^3$ για κάθε $n \geq 1$.

2. **Σ**. Αν $a_n < a_{n+1}$ τότε $a_n \leq a_{n+1}$.

3. **Λ**. Είδαμε ήδη στο μάθημα την ακολουθία που παίρνει διαδοχικά τις τιμές: $0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots$. Αυτή είναι αύξουσα χωρίς να είναι γνησίως αύξουσα.

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ και $a_n = n$ για $n \geq 3$, δηλαδή η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ έχει διαδοχικές τιμές: $0, 0, 3, 4, 5, 6 \dots$. Αυτή είναι πάλι μια αύξουσα ακολουθία που δεν είναι γνησίως αύξουσα. Η διαφορά με την ακολουθία που ορίσαμε στο μάθημα είναι ότι εδώ έχουμε $a_n = a_{n+1}$ μόνο για $n = 1$ ενώ σε αυτή του μαθήματος ισχύει $a_n = a_{n+1}$ για άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}$.

4. **Σ**. Δείτε την Άσκηση 4 πιο κάτω.

5. **Σ**. Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι αύξουσα τότε έχουμε $a_1 \leq a_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Άσκηση 2.

(i) Δώστε το παράδειγμα μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ που είναι άνω φραγμένη και όχι κάτω φραγμένη (με απόδειξη).

(ii) Δώστε το παράδειγμα μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ που δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη (με απόδειξη).

(iii) Δώστε το παράδειγμα μιας γνησίως φθίνουσας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ που είναι φραγμένη (με απόδειξη).

Λύση.

(i) Ορίζουμε

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Τότε για κάθε $n \geq 1$ έχουμε $a_n \leq 1$, άρα η ακολουθία είναι άνω φραγμένη. Για να δείξουμε ότι δεν είναι κάτω φραγμένη δείχνουμε ότι για κάθε $M_1 \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \geq 1$ με $a_n < M_1$.

Έστω $M_1 \in \mathbb{R}$. Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k > -M_1$. Παίρνουμε $n = 2k+1$. Έχουμε $n \geq 1$ και $n = 2k+1 > k > -M_1$. Εφόσον ο n είναι περιττός προκύπτει

$$a_n = -n = -(2k+1) < -k < M_1.$$

(ii) Ορίζουμε

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

για $n \geq 1$. Ισοδύναμα $a_n = (-1)^n \cdot n$, $n \geq 1$.

Δείχνουμε ότι η ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη. Έστω $M_2 \in \mathbb{R}$. Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k > \max\{M_2, 0\}$. Παίρνουμε $n = 2k$. Τότε το n είναι άρτιος, θετικός (γιατί $k > 0$) και επομένως $n \geq 1$. Άρα

$$a_n = n = 2k > k > M_2.$$

Τώρα δείχνουμε ότι η ακολουθία δεν είναι κάτω φραγμένη. Έστω $M_1 \in \mathbb{R}$. Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k > -M_1$. Παίρνουμε $n = 2k+1$. Τότε το n είναι περιττός αριθμός και

$$a_n = -n = -(2k+1) < -k < M_1.$$

(iii) Παίρνουμε $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$. Τότε $0 \leq a_n \leq 1$ για κάθε $n \geq 1$ επομένως η ακολουθία είναι φραγμένη. Προφανώς ισχύει $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ για κάθε $n \geq 1$ και άρα η ακολουθία είναι φθίνουσα.

Άσκηση 3 (Ισοδυναμίες φραγμένης)**.** Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) υπάρχει $M_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_0$,

(ii) υπάρχει $M_1 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_1$,

(iii) υπάρχει $M_2 > 75847912$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_2$.

Υπόδειξη. Δείξτε τις συνεπαγωγές (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Λύση.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Θεωρούμε ένα $M_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_0$. (Παρατηρούμε ότι αναγκαστικά $M_0 \geq 0$, εμείς θέλουμε να εξασφαλίσουμε ένα θετικό M_1.)

Ορίζουμε $M_1 = \max\{M_0, 1\}$. Τότε $M_1 \geq 1 > 0$ και $M_1 \geq M_0$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_1$. Έστω $n \geq 1$. Ισχύει

$$|a_n| \leq M_0 \leq M_1$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Θεωρούμε ένα M_1 όπως στην υπόθεση και ορίζουμε $M_2 = \max\{M_1, 75847913\}$.

Τότε $M_2 > 75847912$ και $M_2 \geq M_1$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_2$. Έστω $n \geq 1$. Ισχύει

$$|a_n| \leq M_1 \leq M_2$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Αυτό είναι προφανές. Αν το M_2 είναι όπως στην υπόθεση μπορούμε να πάρουμε $M_0 = M_2 \in \mathbb{R}$ και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 4 (Ισοδυναμίες φραγμένης)**.** Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M$,

(ii) υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $-M_1 \leq a_n \leq M_2$.

Λύση.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Θεωρούμε $M \in \mathbb{R}$ για το οποίο για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M$. Τότε $-M \leq a_n \leq M$ για κάθε $n \geq 1$ και επομένως μπορούμε να πάρουμε $M_1 = M_2 = M$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Θεωρούμε $M_1, M_2 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $-M_1 \leq a_n \leq M_2$. Ορίζουμε $M = \max\{M_1, M_2\}$. Τότε $M \geq M_1 > 0$, άρα $M > 0$. Δείχνουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M$.

Έστω $n \geq 1$. Ισχύει

$$-M \leq -M_1 \leq a_n \leq M_2 \leq M.$$

Επομένως $-M \leq a_n \leq M$, ισοδύναμα $|a_n| \leq M$.

Άσκηση 5. Δίνεται ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$. Διατυπώστε *χωρίς απόδειξη* την άρνηση της ακόλουθης μαθηματικής πρότασης (δεν χρειάζεται να εξετάσετε αν ισχύει):¨

υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $b \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in A$ με: $x > b$ ή $b \leq a$.

Λύση.

Η άρνηση της πρότασης έχει ως εξής:

για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει $b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq b$ **και** $b > a$.

(Παρατηρήστε ότι η άρνηση της πρότασης " $x > b$ ή $b \leq a$" είναι "$x \leq b$ και $b > a$".)

Άσκηση 6. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν *σχεδόν όλα* τα $n \in \mathbb{N}$; (Χωρίς απόδειξη)

$$A = \{5, 6, 7, \dots, 99, 100\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \geq 400\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n-8) > 0\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n-8) = 0\}$$
$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ο } n \text{ είναι άρτιος}\}$$

Λύση.

Τα σύνολα που περιέχουν σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ είναι τα A και B.

Δίνουμε κάποιες εξηγήσεις (δεν είναι ζητούμενο της άσκησης).

Για το A: παρατηρούμε ότι αν $n \geq 20$ τότε $n^2 \geq 400$ και επομένως $n \in A$. Άρα το A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Το σύνολο $\{5, 6, 7, \dots, 99, 100\}$ δεν παίζει κανένα ρόλο, ούτε μας επηρεάζει που περιέχει φυσικούς που το τετράγωνό τους είναι μεγαλύτερο-ίσο του 400.

Για το B παρατηρούμε ότι για κάθε $n \geq 9$ έχουμε $(n-3) \cdot (n-8) > 0$ και άρα $n \in B$.

Το C είναι πεπερασμένο σύνολο, συγκεκριμένα $C = \{3, 8\}$, επομένως δεν μπορεί να περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Για το D καταλαβαίνουμε ότι "αφήνει εκτός" άπειρα $n \in \mathbb{N}$ (τους περιττούς αριθμούς) επομένως δεν μπορεί να περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Παραπέμπουμε στην Άσκηση 8 για την αυστηρή απόδειξη.

Άσκηση 7 (Απαιτητική)**.**

(i) Δείξτε ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν το σύνολο $\mathbb{N} \setminus A$ είναι πεπερασμένο.

Υπόδειξη: Ένα σύνολο $B \subseteq \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο ακριβώς όταν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα $B \subseteq \{k \in \mathbb{N} \mid k < n_0\}$.

(ii) Συμπεράνετε ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ **δεν** περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ακριβώς όταν έχουμε $n \notin A$ για άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}$.

Σχόλιο: Το (i) της άσκησης αιτιολογεί γιατί ένα σύνολο A που περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται και *συμπεπερασμένο*. Ο όρος προκύπτει από το συνθετικό *συν* (που στα μαθηματικά χρησιμοποιείται κυρίως για να αναφερθεί στο συμπλήρωμα ενός συνόλου) και το επίθετο *πεπερασμένο*.

Επομένως το συν-πεπερασμένο (δηλαδή συμπεπερασμένο σύμφωνα με τους κανόνες της ελληνικής γραμματικής) σύνολο είναι ακριβώς το σύνολο με πεπερασμένο συμπλήρωμα. Από το (i) αυτό είναι το ίδιο με το σύνολο που περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Λύση.

(i) Υποθέτουμε αρχικά ότι το σύνολο A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n \in A$. Επομένως αν $n \in \mathbb{N} \setminus A$ τότε $n < n_0$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{N} \setminus A \subseteq \{0, 1, \ldots, n_0 - 1\}$, άρα το $\mathbb{N} \setminus A$ είναι πεπερασμένο.

Υποθέτουμε ότι το $\mathbb{N} \setminus A$ είναι πεπερασμένο. Τότε σύμφωνα με την υπόδειξη υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\mathbb{N} \setminus A \subseteq \{k \in \mathbb{N} \mid k < n_0\}$. Έστω $n \geq n_0$. Αν είχαμε $n \notin A$ τότε θα ίσχυε $n \in \mathbb{N} \setminus A$ και από το προηγούμενο θα είχαμε $n < n_0$, άτοπο. Άρα $n \in A$.

Με άλλα λόγια δείξαμε ότι υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n \in A$. Επομένως το A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Συνοψίζοντας αποδείξαμε:

$$\text{το } A \text{ περιέχει σχεδόν όλα τα } n \in \mathbb{N} \iff \text{το } \mathbb{N} \setminus A \text{ είναι πεπερασμένο.}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\text{το } A \textbf{ δεν} \text{ περιέχει σχεδόν όλα τα } n \in \mathbb{N} &\iff \text{το } \mathbb{N} \setminus A \text{ δεν είναι πεπερασμένο} \\
&\iff \text{το } \mathbb{N} \setminus A \text{ είναι άπειρο} \\
&\iff \text{έχουμε } n \in \mathbb{N} \setminus A \text{ για άπειρα το πλήθος } n \in \mathbb{N} \\
&\iff \text{έχουμε } n \notin A \text{ για άπειρα το πλήθος } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι το σύνολο A όλων των άρτιων αριθμών δεν περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να το αποδείξετε είναι με τη βοήθεια της προηγούμενη άσκησης.

Λύση.

Πρώτα δείχνουμε το ζητούμενο με τη βοήθεια της Άσκησης 7. Αν το A περιείχε σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ τότε από την Άσκηση 7 το σύνολο $\mathbb{N} \setminus A$ θα ήταν πεπερασμένο. Αφού όμως το A είναι το σύνολο των άρτιων αριθμών το σύνολο $\mathbb{N} \setminus A$ είναι το σύνολο των περιττών. Δηλαδή θα είχαμε ότι το σύνολο των περιττών αριθμών είναι πεπερασμένο που είναι άτοπο. Άρα το A δεν μπορεί να περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Δείχνουμε το ζητούμενο και με ακόμα έναν (όχι πολύ διαφορετικό) τρόπο. Υποθέτουμε πάλι προς άτοπο ότι το A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε ένα n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n \in A$. Παίρνουμε $n = 2n_0 + 1$. Τότε $n \geq n_0$ και άρα $n \in A$. Από την άλλη όμως το n είναι περιττός αριθμός και άρα $n \notin A$, άτοπο.