Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

1ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Άσκηση 1 (De Morgan's laws)**.** Θεωρούμε σύνολα A, B, X. Δείξτε τις ακόλουθες ισότητες συνόλων, που είναι γνωστές και ως **Νόμοι De Morgan**:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$
$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Υπόδειξη. Σε κάθε ισότητα δείξτε ότι το σύνολο στα αριστερά είναι υποσύνολο του συνόλου στα δεξιά και αντίστροφα.

Λύση.

Ξεκινάμε με την **πρώτη ισότητα** συνόλων. Δείχνουμε αρχικά ότι το σύνολο $X \setminus (A \cup B)$ είναι υποσύνολο του $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. Θεωρούμε ένα $x \in X \setminus (A \cup B)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

Αφού $x \in X \setminus (A \cup B)$ τότε $x \in X$ και $x \notin A \cup B$. Ειδικότερα το x δεν ανήκει στο A **και** το x δεν ανήκει στο B. Αφού $x \in X$ έχουμε ότι το x ανήκει στο $X \setminus A$ και το x ανήκει στο $X \setminus B$. Άρα το x ανήκει στην τομή $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, που είναι το ζητούμενο.

Αντίστροφα δείχνουμε ότι το $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ είναι υποσύνολο του $X \setminus (A \cup B)$. Θεωρούμε $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ και πρέπει να δείξουμε ότι $x \in X \setminus (A \cup B)$.

Αφού $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ τότε $x \in X \setminus A$ και $x \in X \setminus B$. Ειδικότερα το x δεν ανήκει στο A και το x δεν ανήκει στο B. Επομένως το x δεν ανήκει στην ένωση $A \cup B$. Αφού το x ανήκει στο X προκύπτει ότι $x \in X \setminus (A \cup B)$.

2ος τρόπος για την πρώτη ισότητα συνόλων: Οι πιο πάνω συλλογισμοί μπορούν να γραφούν πιο σύντομα χρησιμοποιώντας λογικές ισοδυναμίες ως εξής:

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cup B) &\iff x \in X \text{ και } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in X \text{ και} (x \notin A \text{ και } x \notin B) \\ &\iff x \in X \setminus A \text{ και } x \in X \setminus B \\ &\iff x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B). \end{aligned}$$

Άρα τα σύνολα $X \setminus (A \cup B)$ και $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία και επομένως είναι ίσα.

Η **δεύτερη ισότητα** συνόλων προκύπτει με παρόμοιους συλλογισμούς. Τη δείχνουμε χρησιμοποιώντας τις λογικές ισοδυναμίες.

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cap B) &\iff x \in X \text{ και } x \notin A \cap B \\ &\iff x \in X \text{ και } (x \notin A \textbf{ ή } x \notin B) \\ &\iff x \in X \setminus A \text{ ή } x \in X \setminus B \\ &\iff x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B). \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Δείξτε ότι $2^n \geq n + 1$ για κάθε $n \geq 1$ με τους εξής δύο τρόπους:

(i) Με την Αρχή της Επαγωγής.

(ii) Με την ανισότητα Bernoulli.

Λύση.
(i) Για $n = 1$ έχουμε $2^n = 2^1 = 2 = 1 + 1 = n + 1$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ισχύει $2^n \geq n+1$. Δείχνουμε ότι $2^{n+1} \geq (n+1)+1 = n+2$. Έχουμε:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1) = 2n + 2 \geq n + 2,$$

όπου στην πιο πάνω ανίσωση εφαρμόσαμε την Επαγωγική Υπόθεση.

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε $2^n \geq n + 1$ για κάθε $n \geq 1$.

(ii) Εφαρμόζουμε την ανισότητα Bernoulli $(1 + a)^n \geq 1 + na$ για $a = 1$ και έχουμε:

$$(1 + 1)^n \geq 1 + n \cdot 1$$

ισοδύναμα: $2^n \geq n + 1$.

Σχόλιο: Φαίνεται ότι ο δεύτερος τρόπος δεν χρησιμοποιεί την Αρχή της Επαγωγής, αλλά αυτό είναι μόνο επιφανειακό. Η Αρχή της Επαγωγής χρησιμοποιείται έμμεσα γιατί τη χρειαζόμαστε στην απόδειξη της ανισότητας του Bernoulli.

Άσκηση 3. Δείξτε την **αυστηρή** ανισότητα Bernoulli: για κάθε $a > -1$ με $a \neq 0$ και για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει:

$$(1 + a)^n > 1 + na.$$

Λύση.
Με επαγωγή. Θεωρούμε $a > -1$ με $a \neq 0$. Για $n = 2$ έχουμε

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$$

γιατί $a \neq 0$ και συνεπώς $a^2 > 0$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 2$ ισχύει $(1 + a)^n > 1 + na$. (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι $(1 + a)^{n+1} > 1 + (n + 1)a$. Έχουμε

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \cdot (1 + a) > (1 + na) \cdot (1 + a)$$

(από επαγωγική υπόθεση και γιατί $1 + a > 0$)

$$= 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 > 1 + (n + 1)a,$$

όπου στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιήσαμε ότι $na^2 > 0$ γιατί $a \neq 0$.

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι:

(i) $2n^2 > 2n + 1$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

(ii) $3^n > n^2$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι η (i) δεν ισχύει για $n = 0, 1$. Από την άλλη η (ii) ισχύει για $n = 0, 1$. Αντί όμως να ξεκινήσουμε την επαγωγή από το 0 η εκφώνηση του (ii) μας "βοηθάει" υποδεικνύοντας να ξεκινήσουμε την επαγωγή από το 2. Επίσης για να λύσουμε το (ii) θα χρειαστούμε σε κάποιο σημείο το (i).

Λύση.
(i). Για $n = 2$ έχουμε $2n^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$ και $2n + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Άρα ισχύει $2n^2 > 2n + 1$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο n ισχύει $2n^2 > 2n + 1$. (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι $2(n + 1)^2 > 2(n + 1) + 1 = 2n + 3$. Έχουμε

$$2(n + 1)^2 = 2(n^2 + 2n + 1) = 2n^2 + 4n + 2 > 2n + 1 + 4n + 2$$

(από επαγωγική υπόθεση)

$$= 6n + 3 \geq 2n + 3.$$

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii). Για $n = 2$ έχουμε $3^n = 3^2 = 9 > 4 = 2^2 = n^2$.

Υποθέτουμε ότι $3^n > n^2$ για κάποιο $n \geq 2$. (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι $3^{n+1} > (n + 1)^2$. Έχουμε

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot n^2$$

(από επαγωγική υπόθεση)

$$= n^2 + 2n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

όπου στην προηγούμενη ανίσωση χρησιμοποιήσαμε το (i). Άρα δείξαμε ότι $3^{n+1} > (n+1)^2$ και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι ο αριθμός $(2n+1)^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8 για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

Λύση.

Για $n = 1$ έχουμε

$$(2n+1)^2 - 1 = (2 \cdot 1 + 1)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

που είναι πολλαπλάσιο του 8.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ο αριθμός $(2n+1)^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8. Δείχνουμε ότι ο αριθμός $(2(n+1)+1)^2 - 1 = (2n+3)^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

Από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $(2n+1)^2 - 1 = 8k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ή αλλιώς $(2n+1)^2 = 8k+1$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}(2n+3)^2 - 1 &= 4n^2 + 12n + 9 - 1 \\ &= 4n^2 + 12n + 8 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 + 8n + 7 \\ &= (2n+1)^2 + 8n + 7 \\ &= 8k + 1 + 8n + 7 \\ &= 8k + 8n + 8 \\ &= 8 \cdot (k + n + 1).\end{aligned}$$

Δηλαδή το $(2n+3)^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8. Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι:

(i) $2 + 5 + \cdots + (3n-1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ για κάθε $n \geq 1$.

(ii) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ για κάθε $n \geq 1$.

Λύση.

(i) Για $n = 1$ έχουμε μόνο έναν προσθετέο στο άθροισμα δηλαδή το αριστερό σκέλος είναι ίσο με 2. Το δεξιό σκέλος είναι ίσο με

$$\frac{n(3n+1)}{2} = \frac{1 \cdot (3 \cdot 1 + 1)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ έχουμε

$$2 + 5 + \cdots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}.$$

(Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι

$$2 + 5 + \cdots + (3(n+1) - 1) = \frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2}.$$

Φέρνουμε το δεξιό σκέλος σε πιο απλή μορφή:

$$\frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+4)}{2}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
2+5+\cdots+(3(n+1)-1) &= 2+5+\cdots+(3n-1)+(3(n+1)-1) \\
&= \frac{n(3n+1)}{2}+(3(n+1)-1) \qquad \text{(Από Επαγωγική Υπόθεση)} \\
&= \frac{n(3n+1)}{2}+3n+2 \\
&= \frac{n(3n+1)+6n+4}{2} \\
&= \frac{3n^2+n+6n+4}{2} \\
&= \frac{3n^2+7n+4}{2} \\
&= \frac{(n+1)(3n+4)}{2}.
\end{aligned}$$

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Για $n=1$ έχουμε μόνο έναν προσθετέο στο άθροισμα δηλαδή το αριστερό σκέλος είναι ίσο με $1^2=1$. Το δεξιό είναι ίσο με

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{2\cdot 3}{6}=1.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n\geq 1$ ισχύει

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad .$$

(Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι

$$1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad .$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2 &= 1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \qquad \text{(Από Επαγωγική Υπόθεση)} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.