Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

1ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Άσκηση 1 (De Morgan's laws)**.** Θεωρούμε σύνολα A, B, X. Δείξτε τις ακόλουθες ισότητες συνόλων, που είναι γνωστές και ως **Νόμοι De Morgan**:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$
$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Υπόδειξη. Σε κάθε ισότητα δείξτε ότι το σύνολο στα αριστερά είναι υποσύνολο του συνόλου στα δεξιά και αντίστροφα.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι $2^n \geq n + 1$ για κάθε $n \geq 1$ με τους εξής δύο τρόπους:

(i) Με την Αρχή της Επαγωγής.

(ii) Με την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 3. Δείξτε την **αυστηρή** ανισότητα Bernoulli: για κάθε $a > -1$ με $a \neq 0$ και για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει:

$$(1 + a)^n > 1 + na.$$

Άσκηση 4. Δείξτε ότι:

(i) $2n^2 > 2n + 1$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

(ii) $3^n > n^2$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι η (i) δεν ισχύει για $n = 0, 1$. Από την άλλη η (ii) ισχύει για $n = 0, 1$. Αντί όμως να ξεκινήσουμε την επαγωγή από το 0 η εκφώνηση του (ii) μας "βοηθάει" υποδεικνύοντας να ξεκινήσουμε την επαγωγή από το 2. Επίσης για να λύσουμε το (ii) θα χρειαστούμε σε κάποιο σημείο το (i).

Άσκηση 5. Δείξτε ότι ο αριθμός $(2n + 1)^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8 για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι:

(i) $2 + 5 + \cdots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n + 1)}{2}$ για κάθε $n \geq 1$.

(ii) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$ για κάθε $n \geq 1$.