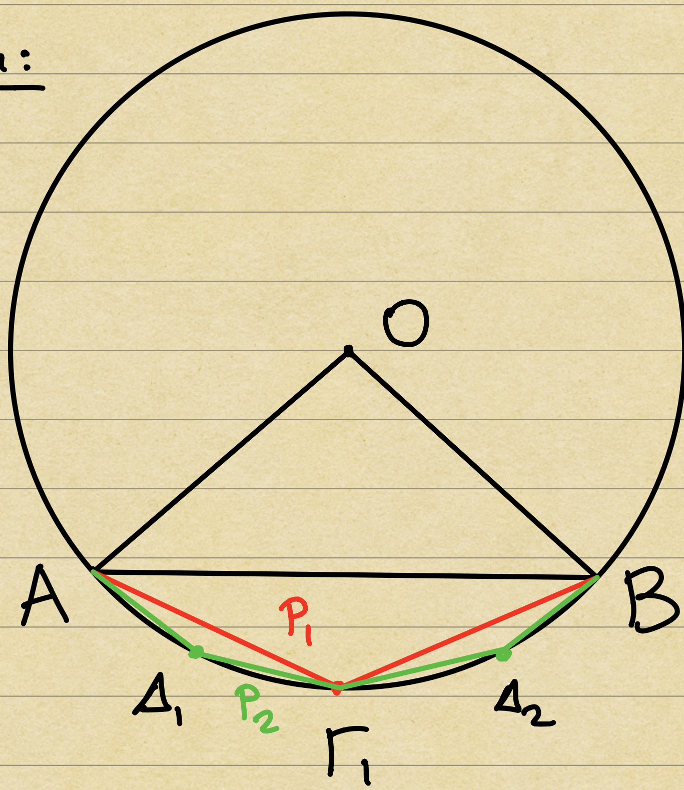
Γεωμετρική απόδειξη ότι

$(\sin x)' = \cos x$ για $-\pi/2 < x < \pi/2$, $x \neq 0$.

B. Γρηγοριάδης

Ισχυρισμός 1: Σε έναν κύκλο η χορδή που αντιστοιχεί σε ένα κυρτό τόξο έχει μήκος μικρότερο του τόξου.

Απόδειξη:



Παίρνουμε Γ_1 το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma_1$ και $\Gamma_1 B$ ορίζουν μια πολυγωνική γραμμή P_1.

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma_1}$ έχουμε

$AB < A\Gamma_1 + \Gamma_1 B$ (τριγωνική ανισότητα)

$= |P_1|$ (μήκος P_1)

Χωρίζουμε τα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma_1}$ και $\overset{\frown}{\Gamma_1 B}$ στη μέση και θεωρούμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta_1$, $\Delta_1\Gamma_1$, $\Gamma_1\Delta_2$ και $\Delta_2 B$. Αυτά ορίζουν την πολυγωνική γραμμή P_2.

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Gamma_1\Delta_1}$ έχουμε

$A\Gamma_1 < A\Delta_1 + \Delta_1\Gamma_1$

και στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Gamma_1 B\Delta_2}$ έχουμε

$\Gamma_1 B < \Gamma_1\Delta_2 + \Delta_2 B$.

Άρα:

$$
\begin{aligned}
AB &< A\Gamma_1 + \Gamma_1 B \\
&< A\Delta_1 + \Delta_1\Gamma_1 + \Gamma_1\Delta_2 + \Gamma_1 B \\
&= |P_2|.
\end{aligned}
$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και κατασκευάζουμε πολυγωνικές γραμμές $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$

με $AB < |P_1| < |P_2| < \dots < |P_n| < \dots$

και $\lim_{n \to \infty} |P_n| = $ μήκος τόξου $\overset{\frown}{AB}$

Άρα $AB <$ μήκος τόξου $\overset{\frown}{AB}$. ∎

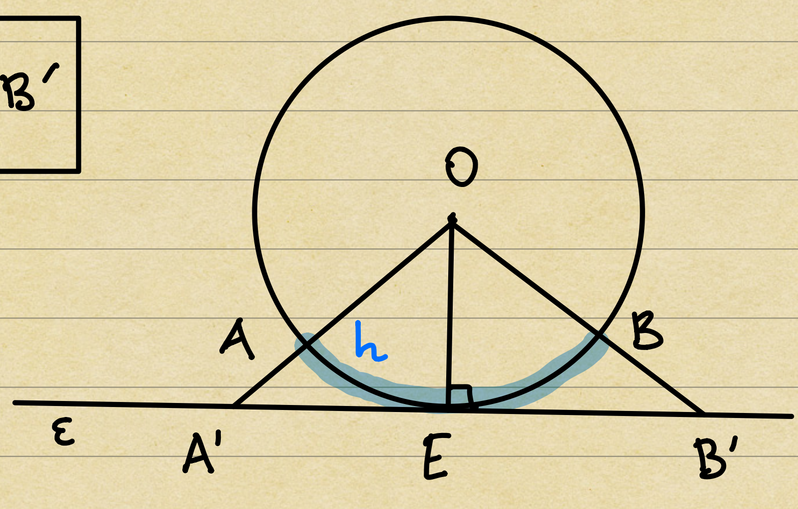
τέλος απόδειξης ισχυρισμού 1.

Ισχυρισμός 2:

Θεωρούμε ένα κυρτό τόξο $\overset{\frown}{AB}$ σε κύκλο (O, r) και φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στη χορδή AB που εφάπτεται του κύκλου.
Αν A' και B' είναι τα σημεία τομής των ευθειών των OA και OB αντίστοιχα με την ε, τότε

$$\boxed{|\overset{\frown}{AB}| < A'B'}$$

↑
μήκος τόξου



Απόδειξη: Έστω h το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$.

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα OAB είναι $\dfrac{h \cdot r}{2}$

και είναι μικρότερο του εμβαδού του τριγώνου $O\hat{A}'B'$.

Άρα $\dfrac{h \cdot r}{2} < \dfrac{1}{2} \cdot A'B' \cdot OE$

$\Leftrightarrow h \cdot r < A'B' \cdot r$

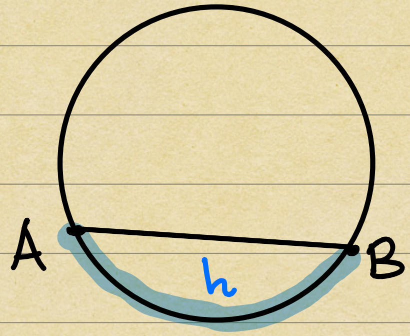
$\Leftrightarrow h < A'B'$

$\blacksquare$

τέλος απόδειξης ισχυρισμού 2

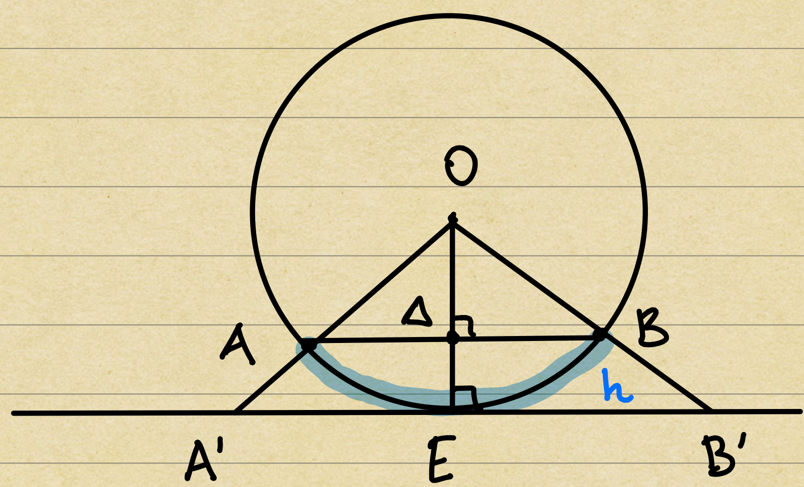
Ισχυρισμός 3:

Ο λόγος του μήκους της χορδής προς το μήκος του αντίστοιχου κυρτού τόξου συγκλίνει στο 1 καθώς το μήκος του τόξου τείνει στο 0.



$$\lim_{h \to 0} \frac{AB}{h} = 1$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το σχήμα του ισχυρισμού 2 και το σημείο Δ της τομής του ΟΕ με τη χορδή ΑΒ.



Υπενθυμίζουμε ότι $AB \parallel A'B'$ και άρα τα τρίγωνα $O\hat{A}B$ και $O\hat{A}'B'$ είναι όμοια.

Από τους ισχυρισμούς 1 και 2:

$$AB < h < A'B'.$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < \frac{h}{AB} < \frac{A'B'}{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{AB}{A'B'} < \frac{AB}{h} < 1 \qquad (1)$$

Αφού τα τρίγωνα $O\hat{A}B$ και $O\hat{A'}B'$ είναι όμοια, έχουμε $\frac{AB}{A'B'} = \frac{O\Delta}{OE}$

(ο λόγος των υψών είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητας)

Από την (1) $\quad \frac{O\Delta}{OE} < \frac{AB}{h} < 1 \quad (2)$

Όταν το h τείνει στο O τα σημεία Δ και Ε τείνουν να συμπέσουν. Άρα το μήκος ΟΔ συγκλίνει στο μήκος της ακτίνας.

Επομένως $\quad \lim_{h \to 0} \frac{O\Delta}{OE} = \frac{r}{r} = 1$

Από την (2) και το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{h \to 0} \frac{AB}{h} = 1$.

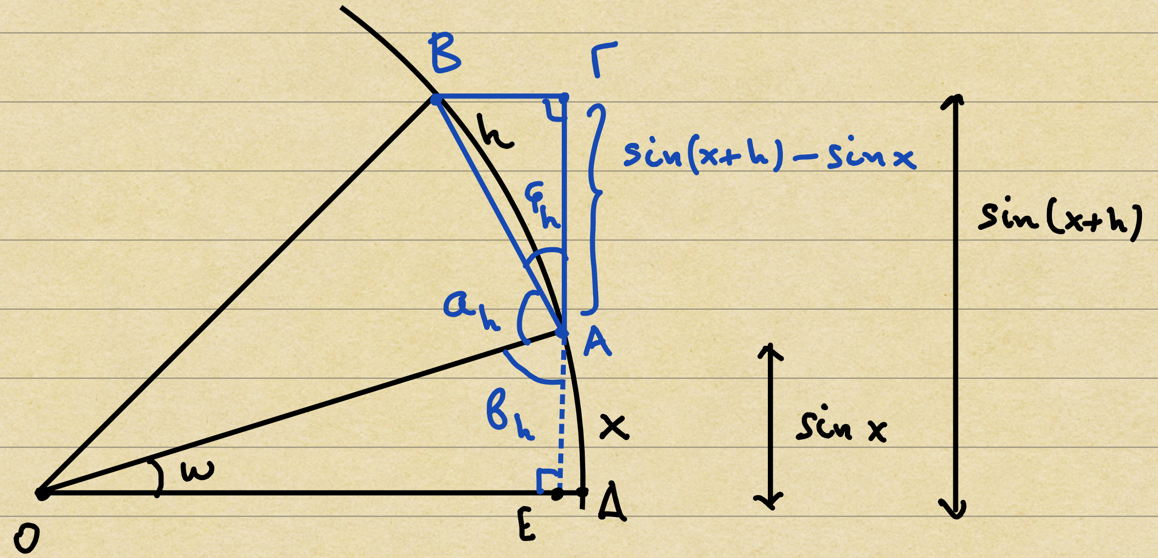
■

τέλος απόδειξης ισχυρισμού 3

Τώρα θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο, ένα κυρτό τόξο μήκους $x \in (0, \pi/2)$ και ένα διαδοχικό τόξο μήκους h.

Δείχνουμε αρχικά ότι:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$



Θεωρούμε τις γωνίες $\varphi_h = B\hat{A}\Gamma$

$a_h = B\hat{A}O$, $b_h = O\hat{A}E$ και $\omega = A\hat{O}\Delta$.

(Παρατηρούμε ότι η ω αντιστοιχεί στο x.)

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{A\Gamma}{h} = \frac{A\Gamma}{AB} \cdot \frac{AB}{h}$$

$$= \cos\varphi_h \cdot \frac{AB}{h} \quad (3)$$

Έχουμε $b_h = \frac{\pi}{2} - \omega$ $(O\hat{E}A)$

και $\varphi_h + a_h + b_h = \pi$. (Μέτρα γωνιών)

Άρα $\varphi_h + a_h + \frac{\pi}{2} - \omega = \pi$

$$\Leftrightarrow \varphi_h = \frac{\pi}{2} + \omega - a_h \quad (4)$$

Όταν το h τείνει στο 0 το σημείο B τείνει στο A και άρα η ευθεία της χορδής AB τείνει να γίνει η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A.

Άρα $$\lim_{h\to 0^+} a_h = \frac{\pi}{2}$$

Από την (4)

$$\lim_{h\to 0^+} \varphi_h = \frac{\pi}{2} + \omega - \frac{\pi}{2} = \omega$$

Εφόσον το συνημίτονο είναι συνεχής συνάρτηση

$$\lim_{h\to 0^+} \cos\varphi_h = \cos\omega = \cos x$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι το τόξο ΑΔ του μοναδιαίου κύκλου, που έχει μήκος x, έχει για επίκεντρη γωνία ω.

Από την (3) και τον Ισχυρισμό 3 έχουμε

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \cos\varphi_h \cdot \lim_{h\to 0^+} \frac{AB}{h} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Στα προηγούμενα θεωρήσαμε ότι $h>0$. Πρέπει επίσης να δειχθεί ότι

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x$$

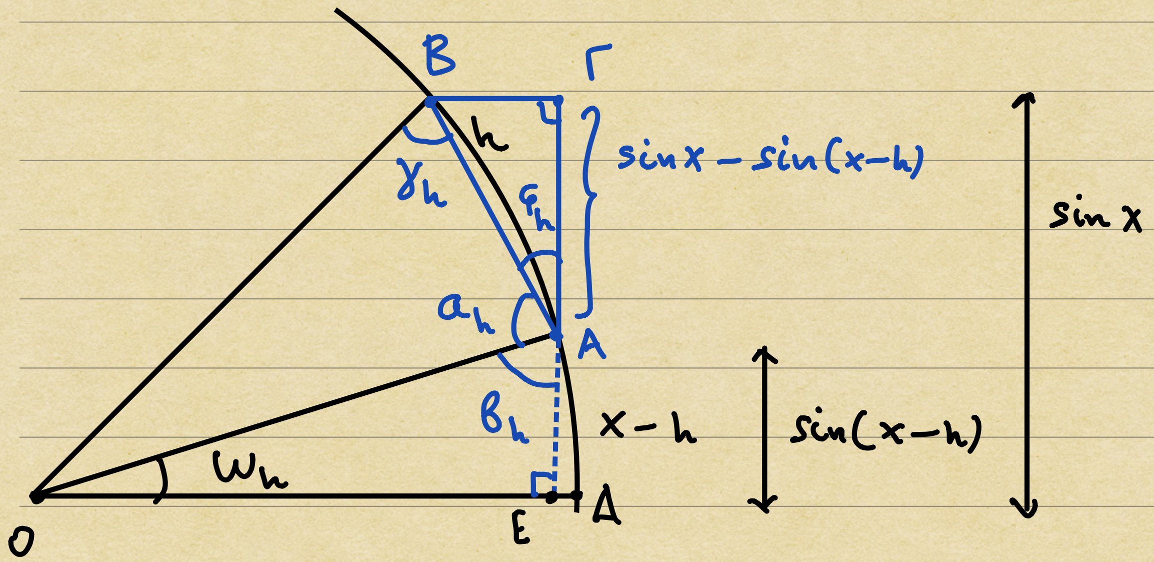
ή ισοδύναμα:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(x-h)-\sin x}{-h} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin x-\sin(x-h)}{h} = \cos x$$

Το σχήμα σε αυτή την περίπτωση παραμένει ουσιαστικά το ίδιο. Απλώς το x είναι το μήκος του τόξου ΒΔ και το $x-h$ είναι το μήκος του τόξου ΑΔ.

Επιπλέον η γωνία ω αντιστοιχεί στο τόξο με μήκος $x-h$ και γι' αυτό τη συμβολίζουμε με ω_h.



Τώρα το A τείνει στο B όταν το h τείνει στο 0 και η γωνία ω_h τείνει στην $B\hat{O}\Delta$.

Επιπλέον η γωνία $\gamma_h = O\hat{B}A$ τείνει στο $\frac{\pi}{2}$.

Έχουμε $a_h = \gamma_h$ ($O\hat{A}B$: ισοσκελές)

και όπως πριν

$$\varphi_h + a_h + \frac{\pi}{2} - \omega_h = \pi$$

$\Leftrightarrow$ $$\varphi_h = \frac{\pi}{2} + \omega_h - \gamma_h .$$

Άρα $\lim_{h \to 0^+} \varphi_h = \frac{\pi}{2} + B\hat{O}\Delta - \frac{\pi}{2}$

$= B\hat{O}\Delta =$ η γωνία που αντιστοιχεί στο τόξο μήκους x.

$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \cos \varphi_h = \cos x$

Επιπλέον όπως με πριν:

$$\frac{\sin x - \sin(x-h)}{h} = \cos \varphi_h \cdot \frac{AB}{h}$$

(από την (3) – ίδιο σχήμα)

και $\lim_{h \to 0} \frac{\sin x - \sin(x-h)}{h} = \cos x \cdot 1$

$= \cos x.$

Καταλήγουμε ότι $(\sin x)' = \cos x$ για $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Η περίπτωση $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

είναι άμεση από την προηγούμενη γεωμετρική απόδειξη.

Αρνητικό x σημαίνει ότι το αντίστοιχο τόξο βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα.
Τα τόξα αυξάνουν κατά μέτρο κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Τα αντίστοιχα σχήματα είναι ανακλάσεις των σχημάτων της περίπτωσης $x > 0$.

Επειδή οι ανακλάσεις του επιπέδου διατηρούν τους λόγους μεγεθών τα όρια

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{\sin(x-h) - \sin x}{h}$$

παραμένουν τα ίδια με $h \to 0^+$.
(Αλλιώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ότι η $\sin x$ είναι περιττή συνάρτηση.)

Σημείωση: Με παρόμοια σχήματα μπορεί να αποδειχθεί ότι $(\sin\theta)' = \cos\theta$.