ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

18. Επίπεδο

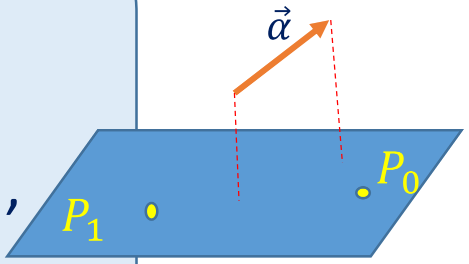
Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

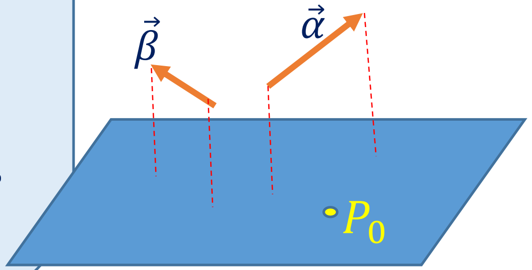
Πώς ορίζεται ένα επίπεδο (π)

1) Από τρία μη συνευθειακά σημεία $P_0, P_1, P_2 \in (\pi)$.

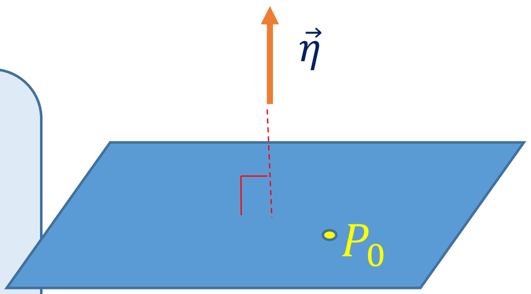
2) Από δύο σημεία $P_0, P_1 \in (\pi)$ και ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}//(\pi)$, αλλά μη συγγραμμικό με το $\overrightarrow{P_0P_1}$.



3) Από ένα σημείο του $P_0 \in (\pi)$ και δύο μη μηδενικά μη συγγραμμικά διανύσματα παράλληλα προς αυτό $\vec{\alpha}, \vec{\beta}//(\pi)$.



4) Από ένα σημείο του $P_0 \in (\pi)$ και μία διεύθυνση $\vec{\eta} \perp (\pi)$ κάθετη προς αυτό.



Σκοπός

Σκοπός είναι να εκφράσουμε :

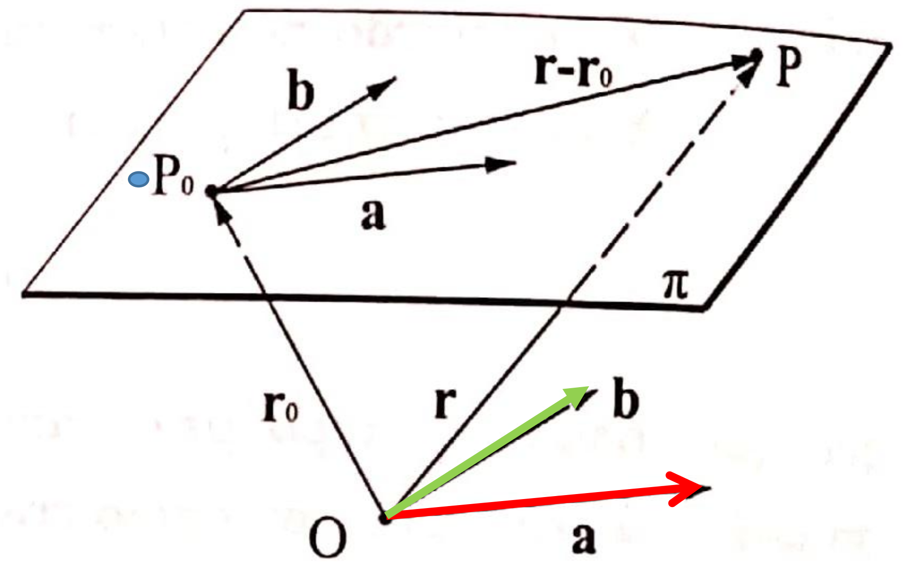
- Τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου σημείο $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\ ) \in (\pi)$ ή
- Το διάνυσμα θέσης $\vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$ του τυχαίου σημείου $P = (x, y, z\ ) \in (\pi)$

με τη βοήθεια των αντίστοιχων μεγεθών που ορίζουν στις προηγούμενες περιπτώσεις το επίπεδο (π).

Περίπτωση 1: Επίπεδο ορισμένο από 1 σημείο και 2 μη συγγραμμικά διανύσματα παράλληλα προς αυτό

Δεδομένα:

- σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$, και
- δύο διανύσματα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ με παράλληλες διευθύνσεις ως προς το (π).



Συντεταγμένες τυχαίου σημείου σημείο $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in (\pi)$

$$P \in (\pi) \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}, \vec{a}, \vec{b} \text{ συνεπίπεδα}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ με } \overrightarrow{P_0P} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}.$$

Αν $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r_0}$, έχουμε

Διανυσματική παραμετρική εξίσωση: $\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$,

Διανυσματική εξίσωση: $\left[\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{a}, \vec{b}\right] = 0.$

Τρία διανύσματα στο R^3 είναι **συνεπίπεδα** αν και μόνο αν το μικτό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν, δηλ. $\langle \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}} \rangle = [\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}] = \boldsymbol{0}$.

Περίπτωση 1: Επίπεδο ορισμένο από 1 σημείο και 2 μη συγγραμμικά διανύσματα παράλληλα προς αυτό (συνέχεια)

Δεδομένα:

- σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$, και
- δύο διανύσματα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ με παράλληλες διευθύνσεις ως προς το (π).

Αν

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = (x, y, z), \overrightarrow{OP_0} = \vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$$

και

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

τότε από την $\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, έχουμε

$$\text{Παραμετρικές εξισώσεις: } \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \\ y = y_0 + \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2, \\ z = z_0 + \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

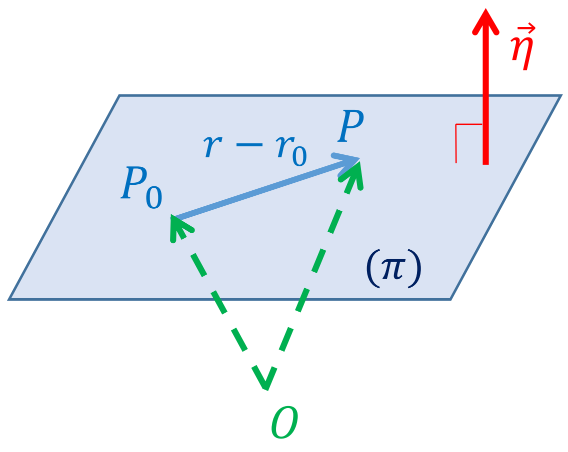
Αν αντικαταστήσουμε στη διανυσματική μορφή $\left[\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{a}, \vec{b}\right] = 0$:

$$\text{Αναλυτική εξίσωση: } \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Περίπτωση 2: Επίπεδο ορισμένο από 1 σημείο και διάνυσμα κάθετο σε αυτό

Δεδομένα:

- σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$, και
- διάνυσμα $\vec{\eta} = (\alpha, \beta, \gamma) \perp (\pi)$.



Αν $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r_0}$, το τυχαίο σημείο $P = (x, y, z) \in (\pi)$ του επιπέδου ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} P \in (\pi) &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \langle \vec{r} - \vec{r_0}, \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle - \langle \vec{r_0}, \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0, \end{aligned}$$

όπου

$$A = \alpha, B = \beta, \Gamma = \gamma, \Delta = -(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0).$$

Παρατήρηση: Οι άλλες περιπτώσεις ανάγονται σε αυτή που αναλύσαμε πιο πάνω, θεωρώντας $\vec{\eta} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου

- Κάθε εξίσωση της μορφής

$$\boldsymbol{Ax+By+\Gamma z+\Delta=0}, \text{με } (A,B,\Gamma,\Delta)\neq(0,0,0)$$

είναι η **καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου** με κάθετο διάνυσμα $\vec{\eta}=(A,B,\Gamma)$.

Διερεύνηση καρτεσιανής εξίσωσης επιπέδου

- Αν *Δ=0*, η εξίσωση $\boldsymbol{Ax+By+\Gamma z+\Delta=0}$, ορίζει ένα επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων.

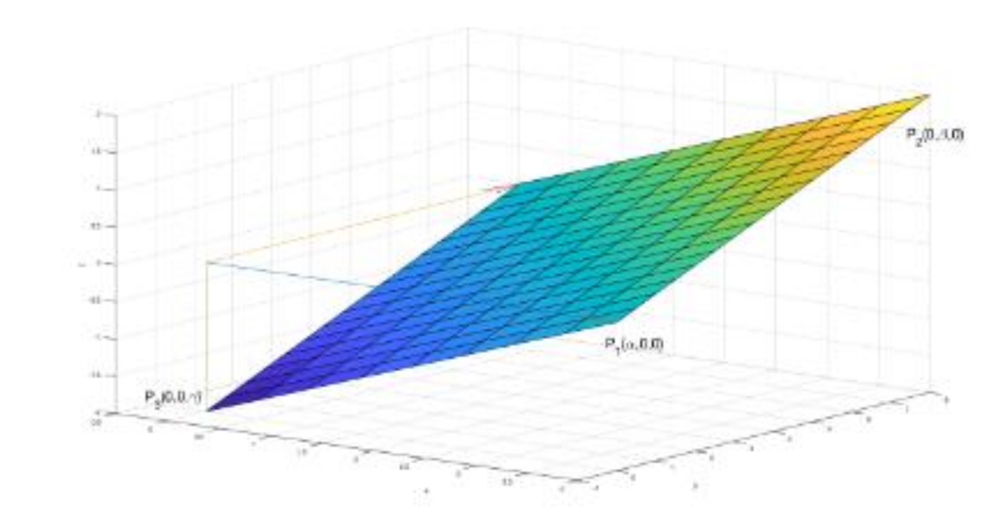
- Αν $AB\Gamma\Delta\neq 0$ τότε η εξίσωση του επιπέδου

$$\boldsymbol{Ax+By+\Gamma z+\Delta=0}\Leftrightarrow\boldsymbol{\frac{x}{a}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1},$$

(Κανονική εξίσωση του επιπέδου)

$$\text{όπου } \alpha=-\frac{\Delta}{A},\beta=-\frac{\Delta}{B},\gamma=-\frac{\Delta}{\Gamma}$$

οι συντεταγμένες του επιπέδου επί την αρχή.



Διερεύνηση καρτεσιανής εξίσωσης επιπέδου

Αφού $(A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$, τότε τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές A, B, Γ είναι διάφορος του 0, άρα:

I. $A \neq 0,\ B = \Gamma = 0$ (Επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα των συντεταγμένων).
Τότε, η εξίσωση γίνεται

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \rightarrow x = x_0 \ \text{ με } \ x_0 = -\frac{\Delta}{A},$$

ενώ το κάθετο διάνυσμα στο (π) είναι το $\vec{n} = (A, 0, 0) = A(1, 0, 0)$.
Επομένως, το επίπεδο (π) είναι κάθετο προς τον άξονα $x'x$ στο σημείο του $(x_0, 0, 0)$.

- Όμοια, η εξίσωση $y = y_0$ ορίζει επίπεδο κάθετο προς τον $y'y$.
- Όμοια, η εξίσωση $z = z_0$ ορίζει επίπεδο κάθετο προς τον $z'z$.

Ειδικές περιπτώσεις:

- $z = 0$: η εξίσωση του επιπέδου xOy.
- $y = 0$: η εξίσωση του επιπέδου xOz.
- $x = 0$: η εξίσωση του επιπέδου yOz.

- Κάθε εξίσωση της μορφής

$$\boldsymbol{Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0}, \text{ με } (A, B, \Gamma, \Delta) \neq (0,0,0)$$

είναι η **καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου** με κάθετο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B, \Gamma)$.

Διερεύνηση καρτεσιανής εξίσωσης επιπέδου

II. $AB \neq 0 = \Gamma$ (Επίπεδα παράλληλα προς τους άξονες των συντεταγμένων). Τότε, η εξίσωση γίνεται

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \to Ax + By + \Delta = 0,$$

ενώ το κάθετο διάνυσμα στο (π) είναι το $\vec{n} = (A, B, 0) = A\vec{i} + B\vec{j}$ με $(\vec{n}, \vec{k}) = 0$.

Επομένως, για $\Gamma = 0$, το επίπεδο (π) είναι παράλληλο προς τον άξονα $z'z$.

- Αν $A = 0$, τότε (π) παράλληλο προς τον άξονα $x'x$.
- Αν $B = 0$, τότε (π) παράλληλο προς τον άξονα $y'y$.

- Κάθε εξίσωση της μορφής

$$\boldsymbol{Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0}, \text{ με } (A, B, \Gamma, \Delta) \neq (0,0,0)$$

είναι η **καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου** με κάθετο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B, \Gamma)$.