ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

17. Ευθεία

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

Η ευθεία στο χώρο

Μία ευθεία (ε) στο χώρο ορίζεται μονοσήμαντα

Περίπτωση 1

1) Από **ένα σημείο $\boldsymbol{P_0}$** και
μία διεύθυνση προς την οποία είναι παράλληλη ($\vec{\boldsymbol{u}}$)

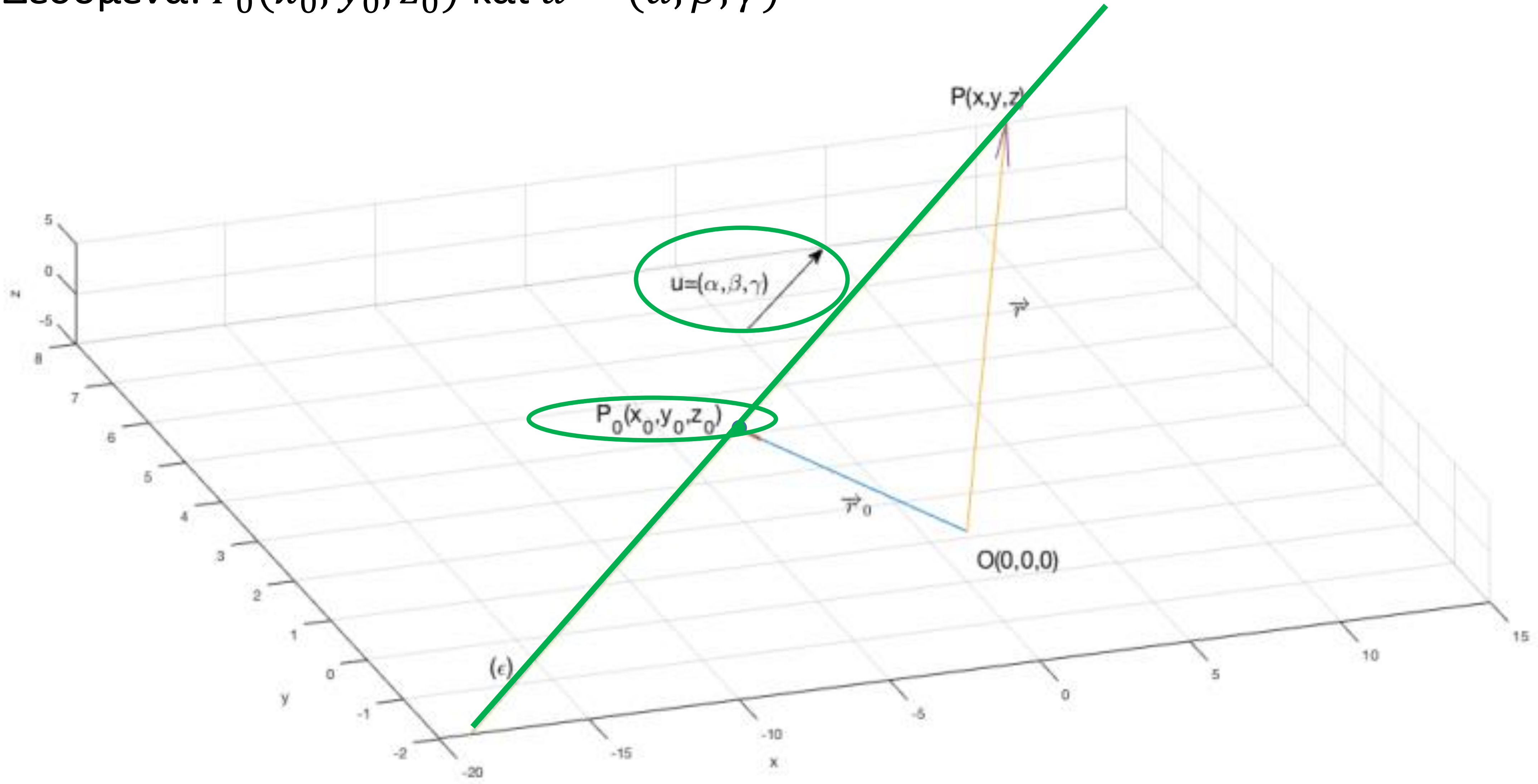
Περίπτωση 2

2) Από **δύο σημεία της $\boldsymbol{P_0}$ και $\boldsymbol{P_1}$**.

Σκοπός μας είναι να εκφράσουμε τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου $\boldsymbol{P(x,y,z)}$ της ευθείας (ε) ή το $\vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ το διάνυσμα θέσης του σημείου $P \in (\varepsilon)$, με τη βοήθεια των δεδομένων σε κάθε περίπτωση.

Περίπτωση 1: Ευθεία από σημείο και παράλληλη προς διάνυσμα

- Δεδομένα: $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$



Περίπτωση 1: Ευθεία από σημείο P_0 και παράλληλη προς διάνυσμα $\vec{u}$

Διανυσματική εξίσωση ευθείας

- $P(x, y, z)$ τυχαίο σημείο της ευθείας (ε)
- $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου $P \in (\varepsilon)$, δηλαδή $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ και
- $\overrightarrow{r_0}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου $P_0(x_0, y_0, z_0) \in (\varepsilon)$, δηλαδή $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$

$$P \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \,//\, \vec{u}$$

το διάνυσμα $\overrightarrow{P_0P}$ είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα $\vec{u}$

1α

$$\Leftrightarrow \vec{r} - \overrightarrow{r_0} = t \cdot \vec{u} \text{ ή } \vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t \cdot \vec{u}, t \in R$$

Διανυσματκή παραμετρική εξίσωση ευθείας

Δηλαδή υπάρχει $t \in R$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = t \cdot \vec{u}$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}\right) \times \vec{u} = \vec{0}$$

1β

Διανυσματική εξίσωση ευθείας

Το εξωτερικό γινόμενο των δύο συγγραμμικών διανυσμάτων $\vec{r} - \overrightarrow{r_0}$ και $\vec{u}$ είναι ίσο με μηδέν, $(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \times \vec{u} = \vec{0}$

Περίπτωση 1: Ευθεία από σημείο P_0 και παράλληλη προς διάνυσμα $\vec{u}$ (συνέχεια)

Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας

- Θέτουμε $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ και $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = (x, y, z)$

$$P(x,y,z) \in (\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{u} \;\Leftrightarrow (x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t \cdot (\alpha,\beta,\gamma) \Leftrightarrow$$

1γ

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + t\boldsymbol{a} \\ y = y_0 + t\boldsymbol{\beta}, t \in R. \\ z = z_0 + t\boldsymbol{\gamma} \end{cases}}$$

Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας

- Απαλείφοντας το t έχουμε

1δ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{\alpha} \\ t = \dfrac{y - y_0}{\beta}, t \in R. \\ t = \dfrac{z - z_0}{\gamma} \end{cases}$$

Αναλυτικές ή καρτεσιανές εξισώσεις ευθείας

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x-x_0}{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{y-y_0}{\boldsymbol{\beta}} = \frac{z-z_0}{\boldsymbol{\gamma}}, \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0}$$

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}, \quad z - z_0 = 0, \quad \text{αν} \quad \gamma = 0 \quad \text{και} \quad \alpha\beta \neq 0$$

$$x = x_0 + t\alpha, \quad y - y_0 = 0, \quad z - z_0 = 0, \quad \text{αν} \quad \beta = \gamma = 0 \quad \text{και} \quad \alpha \neq 0$$

Περίπτωση 1: Παράδειγμα

Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P_0(1,-2,0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

$\vec{u} = (1,-2,3)$

1α Διανυσματική παραμετρική εξίσωση ευθείας

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{u} = (1,-2,0) + t \cdot (1,-2,3) = (1+t,-2-2t,3t) = (1+t)\vec{i} - (2+2t)\vec{j} + 3t\vec{k}, t \in R.$$

1γ Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta, t \in R \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \mathbf{1}t \\ y = -2 - \mathbf{2}t, t \in R \\ z = \mathbf{3}t \end{cases}$$

1δ

Αναλυτικές ή καρτεσιανές εξισώσεις ευθείας (απαλείφοντας το $\boldsymbol{t}$)

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}, \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\mathbf{1}} = \frac{y+2}{\mathbf{-2}} = \frac{z-0}{3}$$

Περίπτωση 1: Παράδειγμα (συνέχεια)

Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P_0(1,-2,0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

$\vec{u} = (1,-2,3)$

1β Διανυσματική εξίσωση ευθείας

Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$ είναι **συγγραμμικά**, αν και μόνο αν το εξωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν, δηλ. $\boldsymbol{\vec{a}} \times \boldsymbol{\vec{b}} = \boldsymbol{\vec{0}}$.

$$(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \times \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-1 & y+2 & z \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$[3(y+2)+2z]\vec{i} - [3(x-1)-z]\vec{j} + [-2(x-1)-(y+2)]\vec{k} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3(y+2)+2z = 0 \\ 3(x-1)-z = 0 \\ (-2)(x-1)-(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1) = \dfrac{z}{3} \\ (x-1) = \dfrac{y+2}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \; x-1 = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3}$$

Περίπτωση 1: Οι άξονες

Ο άξονας χ΄χ είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $O(0,0,0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

1α

Διανυσματική παραμετρική εξίσωση ευθείας

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{u} = (0,0,0) + t \cdot (1,0,0) = (t, 0,0) = t\vec{i}, t \in R.$$

1γ

Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας

$$\begin{cases} x = 0 + t1 \\ y = 0 + t0 \, , t \in R \\ z = 0 + t0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \, , t \in R \\ z = 0 \end{cases}$$

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad t \in \mathbb{R}.$$

Αντίστοιχα, για τον άξονα $y^{'}y$, έχουμε

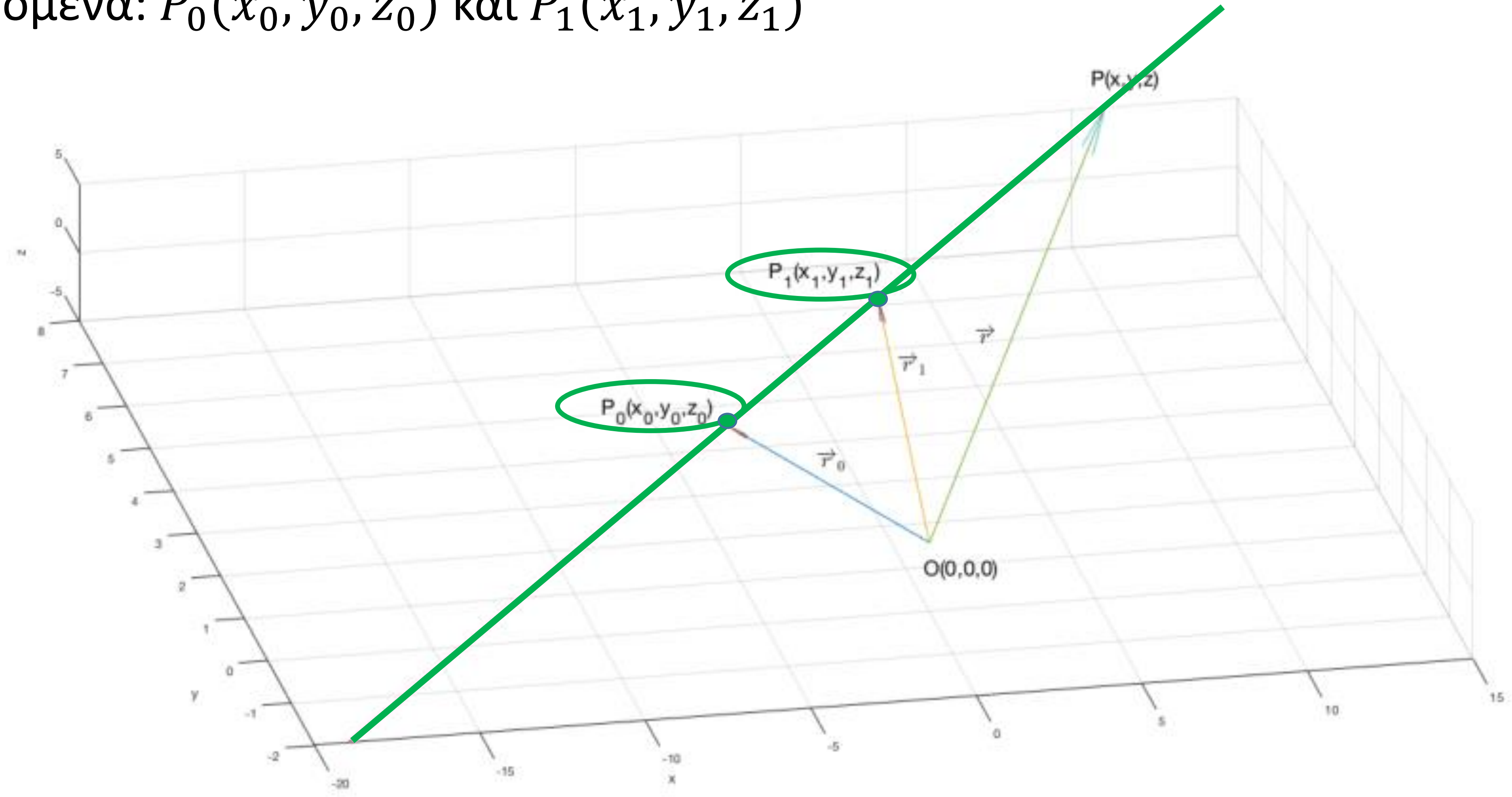
$$x = 0, \quad y = t, \quad z = 0. \quad t \in \mathbb{R}$$

και για τον άξονα $z^{'}z$,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = t. \quad t \in \mathbb{R}$$

Περίπτωση 2: Ευθεία από δύο σημεία

- Δεδομένα: $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και $P_1(x_1, y_1, z_1)$



Περίπτωση 2: Ευθεία από δύο σημεία

Διανυσματική εξίσωση ευθείας

- Ονομάζουμε $P(x, y, z)$ τυχαίο σημείο της ευθείας (ε) με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

- Θεωρώντας ως παράλληλο διάνυσμα της ευθείας (ε) το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{P_0 P_1} = \vec{r_1} - \vec{r_0}$, αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση. Δηλαδή:

$$P \in (\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 P} \,//\, \vec{u} \quad \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r_0}) = t \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r_0}) = t \cdot (\vec{r_1} - \vec{r_0}) \Leftrightarrow$$

2α

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot (\vec{r_1} - \vec{r_0}), t \in R}$$

Διανυσματική παραμετρική εξίσωση ευθείας

2β

Διανυσματική εξίσωση ευθείας

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r_0}) \times (\vec{r_1} - \vec{r_0}) = \vec{0}}$$

Περίπτωση 2: Ευθεία από δύο σημεία (συνέχεια)

Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας

- Θέτουμε $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$και $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = (x, y, z)$

$$P(x,y,z) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \Leftrightarrow$$

2γ

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot (x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t \cdot (y_1 - y_0)\,, t \in R. \\ z = z_0 + t \cdot (z_1 - z_0) \end{cases}$$

Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας

- Απαλείφοντας το t έχουμε

Αναλυτικές ή καρτεσιανές εξισώσεις ευθείας

2δ

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}, \alpha\nu\ (x_1 - x_0)(y_1 - y_0)(z_1 - z_0) \neq 0$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \quad z - z_0 = 0, \quad \alpha\nu \quad \gamma = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad (x_1 - x_0)(y_1 - y_0) \neq 0$$

ή

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y - y_0 = 0, \quad z - z_0 = 0, \quad \alpha\nu \quad y_1 - y_0 = z_1 - z_0 = 0.$$

Περίπτωση 2: Παράδειγμα 1

Να εξεταστεί αν το σημείο $P(2,3,5)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $P_0(1,3,2)$ και $P_1(2,1,0)$.

2α $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t \cdot (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}), t \in R$

Διανυσματική παραμετρική εξίσωση της ευθείας (ε) που ορίζεται από P_0 ∈και P_1 $\in (\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_0 + t\vec{u} = (1,3,2) + t\,(2-1, 1-3, 0-2)\\ &= (1+t, 3-2t, 2-2t)\\ &= (1+t)\vec{i} + (3-2t)\vec{j} + (2-2t)\vec{k}, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2γ Αν $P(2,3,5) \in (\varepsilon)$, τότε θα ικανοποιεί την εξίσωση της (ε) . Άρα

$x = 1 + t \Leftrightarrow 2 = 1 + t \Leftrightarrow t = 1$ και $y = 3 - 2t \Leftrightarrow 3 = 3 - 2t \Leftrightarrow t = 0$, αδύνατο!

Άρα το σημείο $P(2,3,5)$ δεν βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε).

Περίπτωση 2: Παράδειγμα 2

Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από τα σημεία $A(0,1,0)$και $B(1,2,1)$. Η ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο $\Gamma(1,0,1)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = 0\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k} = \vec{j}$.

Να αποδειχθεί ότι οι δύο ευθείες τέμνονται και να βρεθεί τα σημείο τομής τους .

Λύση

Οι παραμετρικές εξισώσεις της (ε_1) .

$$\begin{cases} x = x_A + t\cdot(x_B - x_A) = 0 + \mathrm{t}(1-0) = \mathrm{t} \\ y = y_A + t\cdot(y_B - y_A) = 1 + t(2-1) = 1 + t\,, t \in R. \\ z = z_A + t\cdot(z_B - z_A) = 0 + t(1-0) = t \end{cases}$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις της (ε_2) .

$$\begin{cases} x = x_\Gamma + \lambda u_1 = 1 + \lambda 0 = 1 \\ y = y_\Gamma + \lambda u_2 = 0 + \lambda 1 = \lambda\,, \lambda \in R. \\ z = z_\Gamma + \lambda u_3 = 1 + \lambda 0 = 1 \end{cases}$$

Προκειμένου κάποιο σημείο να βρίσκεται και στις δύο αυτές ευθείες, θα πρέπει να υπάρχουν $t, \lambda \in R$, τέτοια ώστε $\begin{cases} t = 1 \\ 1 + t = \lambda \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$.

Άρα για $t = 1$ και $\lambda = 2$, υπάρχει κοινό σημείο το εξής: $\boldsymbol{K(t, 1+t, t) = (1, \lambda, 1) = (1, 2, 1) \in (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2)}$.

Παρατηρήσεις

1) Μία ευθεία μπορεί να περιγραφεί και ως τομή δύο επιπέδων:

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$$

2) Δύο ευθείες $(\boldsymbol{\varepsilon_1}), (\boldsymbol{\varepsilon_2})$ με εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = x_1 + t\alpha_1 \\ y = y_1 + tb_1, t \in R. \\ z = z_1 + tc_1 \end{cases}$$

ευθεία $(\boldsymbol{\varepsilon_1})$

Από $P_1(x_1, y_1, z_1)$

παράλληλη προς το $\overrightarrow{u_1}(\alpha_1, b_1, c_1)$

$$\begin{cases} x = x_2 + t\alpha_2 \\ y = y_2 + tb_2, t \in R. \\ z = z_2 + tc_2 \end{cases}$$

ευθεία $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$

Από $P_2(x_2, y_2, z_2)$

παράλληλη προς το $\overrightarrow{u_2}(\alpha_2, b_2, c_2)$

Σχηματίζουν γωνία που προσδιορίζεται από :

$$cos\theta = \frac{\alpha_1\alpha_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{{\alpha_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2} \cdot \sqrt{{\alpha_2}^2 + {b_2}^2 + {c_2}^2}} = \frac{\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle}{\|\overrightarrow{u_1}\| \|\overrightarrow{u_2}\|}$$

Σημειώνεται ότι οι ευθείες δεν είναι απαραίτητο να τέμνονται.