ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

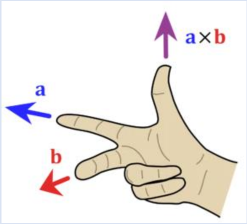
16. Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων-Μικτό γινόμενο

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

Εξωτερικό γινόμενο - ορισμός

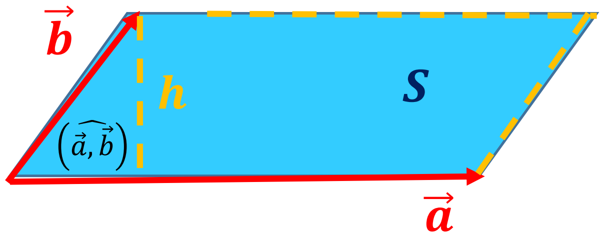
- Δίνονται δύο διανύσματα του χώρου $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ως προς την ορθοκανονική βάση $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
- **Εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$** είναι το διάνυσμα $\vec{a} \times \vec{b}$ το οποίο ορίζεται ως εξής:
- Αν τα $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$ είναι μη συγγραμμικά
- i) Το μέτρο του είναι $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \left|\eta\mu\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)\right|$
- ii) Η διεύθυνσή του είναι κάθετη και στα δύο δανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ δηλαδή $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{a}$ και $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{b}$
- iii) Η φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.



- Αν τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι μη μηδενικά και συγγραμμικά ή αν ένα από αυτά είναι μηδέν ορίζουμε ως $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Μέτρο του εξωτερικού γινομένου- Γεωμετρική Ερμηνεία

- Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου είναι ίσο με το **εμβαδό του παραλληλογράμμου** που έχει ως διαδοχικές πλευρές τις $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \cdot \underbrace{\left\|\vec{b}\right\| \cdot \left|\eta\mu\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)\right|}_{\boldsymbol{h}} = \|\vec{a}\| \cdot h = S$$

Εξωτερικό γινόμενο - υπολογισμός

- Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, ως προς την ορθοκανονική βάση $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, δηλαδή $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$ και $\vec{b} = b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + b_3 \cdot \vec{k}$
- Ορίζουμε ως εξωτερικό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}$ (συμβολικά $\vec{a} \times \vec{b}$) το διάνυσμα
- $\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$
- $= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \cdot \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

- Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η έκφραση αυτή προκύπτει από το ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής της συμβολικής «ορίζουσας»:

$$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Αυτή η έκφραση είναι ως προς μία δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Εξωτερικό γινόμενο - παράδειγμα

Δίνονται δύο διανύσματα του χώρου $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$: $\vec{a} = (2, -3, 5\ ), \vec{b} = (-1, 2, -3\ )$
ως προς την ορθοκανονική βάση $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, δηλαδή

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k} \text{ και} \\ \vec{b} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} \end{array}}$$

Τότε:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + k.$$

Εξωτερικό γινόμενο – ορισμένες ιδιότητες

Για $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$ και $\lambda \in R$:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2) $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

4) Το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι προσεταιριστικό: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Πρόταση

Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$ είναι **συγγραμμικά**, αν και μόνο αν το εξωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν, δηλ. $\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}}$.

Μικτό γινόμενο - ορισμός

- Για κάθε $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ορίζουμε **μικτό γινόμενο** (συμβολικά $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ ή $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$) :

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \in R$$

Πρόταση

- Τρία διανύσματα στο R^3 είναι **συνεπίπεδα** αν και μόνο αν το μικτό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν, δηλ. $\boldsymbol{\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0}$.

Πράγματι:

Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$ είναι συνεπίπεδα τότε το $(\vec{a} \times \vec{b})$ θα είναι κάθετο και στο $\vec{c}$, άρα $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$, επομένως το εσωτερικό τους γινόμενο ίσο με μηδέν, δηλ. $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.

Και αντίστροφα:

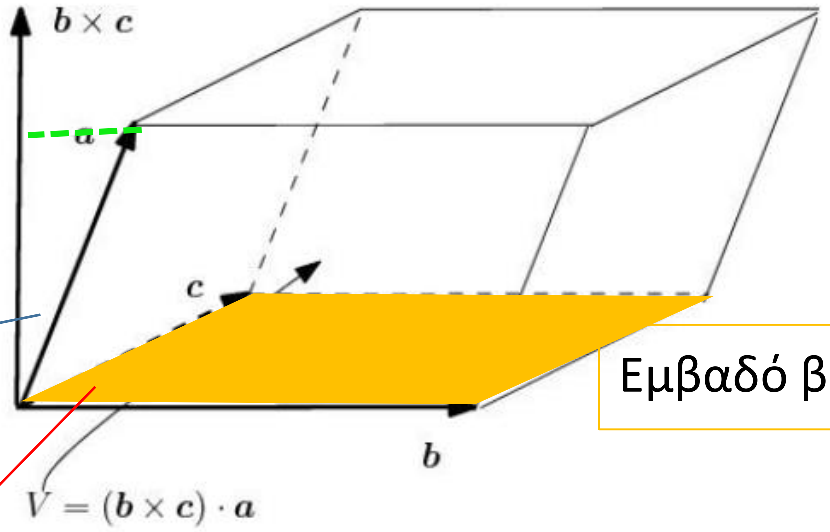
Αν $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ συμπεραίνουμε ότι $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$. Επίσης από ορισμό εξωτερικού γινομένου έχουμε: $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ και $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$. Άρα Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι συνεπίπεδα.

Μέτρο του μικτού γινομένου- Γεωμετρική Ερμηνεία

- Το μέτρο $\left|\left[\vec{a}\,,\vec{b},\vec{c}\right]\right|$ του μικτού γινομένου είναι ίσο με τον **όγκο του παραλληλεπιπέδου** που έχει ως ακμές τα $\vec{a}\,,\vec{b},\vec{c}$.

Ύψος: $\|\vec{a}\| \cdot \left|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}}\right)\right|$

$\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}}\right)$



Εμβαδό βάσης: $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right| = \left\|\vec{b}\right\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \left|\sin\left(\widehat{\vec{b},\vec{c}}\right)\right|$

$\left(\widehat{\vec{b},\vec{c}}\right)$

- $[a\ b\ c]=[c\ a\ b]=[b\ c\ a]=-[b\ a\ c]=-[c\ b\ a]=-[a\ c\ b]$