ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

14. Διανύσματα στο επίπεδο και στον χώρο

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

Διάνυσμα-ορισμός

- Ονομάζουμε **διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$** ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο Α και πέρας το σημείο Β. Ένα διάνυσμα καθορίζεται πλήρως από τη διεύθυνση, τη φορά και το μέτρο του ως εξής:

- **Διεύθυνση ή φορέας του $\overrightarrow{AB}$** είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται.

- **Φορά του $\overrightarrow{AB}$** είναι ο προσανατολισμός του, δηλαδή η μία από τις δύο αντικείμενες ημιευθείες που ορίζει το σημείο A πάνω στην ευθεία στην οποία βρίσκεται.

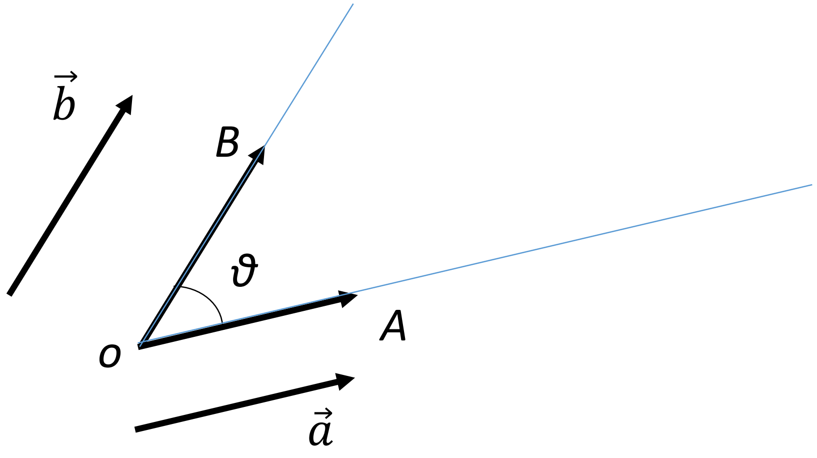
- **Μέτρο του $\overrightarrow{AB}$** είναι το μήκος του αντίστοιχου ευθύγραμμου τμήματος AB (συμβολικά $|AB|$).

Διάνυσμα-ορισμοί

- Ονομάζουμε **μοναδιαίο** ένα διάνυσμα μέτρου 1.
- Ονομάζουμε **μηδενικό** ένα διάνυσμα του οποίου αρχή και το πέρας του συμπίπτουν.
- **Κατεύθυνση του $\overrightarrow{AB}$** ονομάζεται η διεύθυνση και η φορά ενός διανύσματος μαζί.
- **Ίσα** (συμβολικά $\vec{a} = \vec{b}$) ονομάζονται δύο διανύσματα όταν βρίσκονται πάνω στον ίδιο ή σε παράλληλους φορείς, έχουν ίδια φορά και ίσα μέτρα.
- **Αντίθετα** (συμβολικά $\vec{a}, -\vec{a}$) ονομάζονται δύο διανύσματα όταν βρίσκονται πάνω στον ίδιο ή σε παράλληλους φορείς, με αντίθετη φορά και ίσα μέτρα.
- **Παράλληλα (ή συγγραμμικά)** ονομάζονται δύο διανύσματα όταν βρίσκονται σε ίδιους ή σε παράλληλους φορείς (συμβολικά $\vec{a} \,//\, \vec{b}$).
- **Ομόρροπα** (συμβολικά $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$) ονομάζονται δύο διανύσματα όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση.
- **Αντίρροπα** (συμβολικά $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$) ονομάζονται δύο διανύσματα όταν έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.

Γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων

- **Γωνία** $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a},\vec{b}$ ονομάζεται η κυρτή γωνία τους.

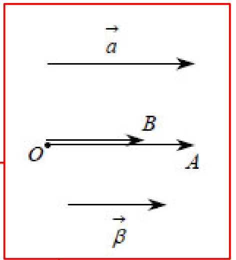


$$\boxed{\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \theta = \widehat{AOB}}$$

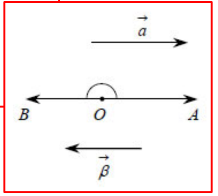
- Ισχύει:

- $0 \leq \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) \leq \pi$
- $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \left(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\right)$

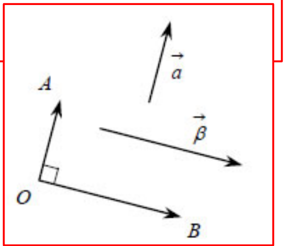
- $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ **ομόρροπα**



- $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \pi \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ **αντίρροπα**

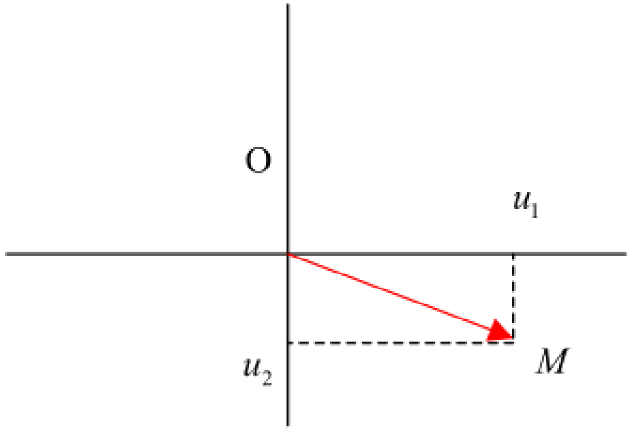


- $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\pi}{2}$ **λέμε ότι τα** $\vec{a},\vec{b}$ **είναι κάθετα ή ορθογώνια**



Στο επίπεδο

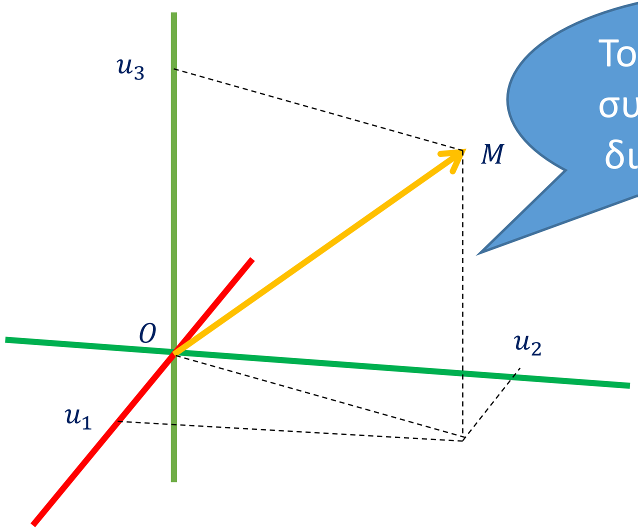
Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο στοιχείο (u_1, u_2) του R^2 το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ του επιπέδου που έχει αρχή το σημείο $O = (0, 0)$ και πέρας το σημείο $M = (u_1, u_2)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Μπορούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ του επιπέδου να το συμβολίζουμε με έναν πίνακα γραμμή $[u_1 \quad u_2]$ ή έναν πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$.

Στο χώρο

Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο στοιχείο (u_1, u_2, u_3) του R^3 το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ του χώρου που έχει αρχή το σημείο $O = (0, 0,0)$ και πέρας το σημείο $M = (u_1, u_2, u_3)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

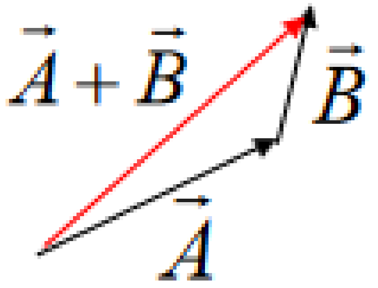


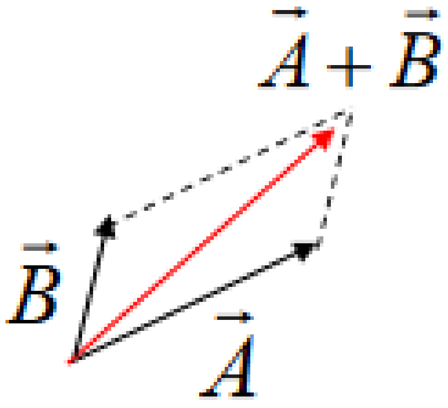
Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ συνήθως λέγεται διάνυσμα θέσης

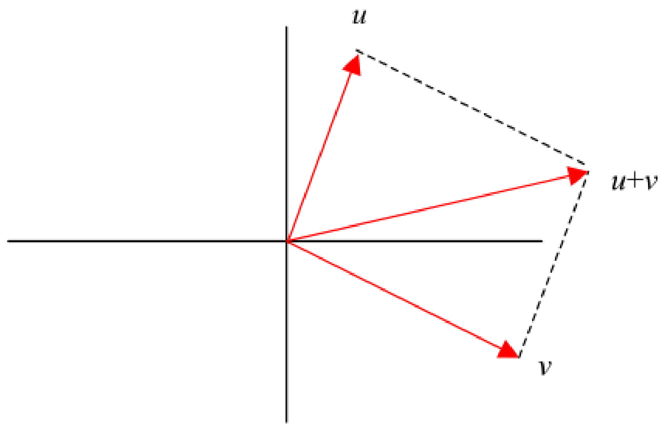
Μπορούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ του χώρου να το συμβολίζουμε με έναν πίνακα γραμμή $[u_1 \quad u_2 \quad u_3]$ ή έναν πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$.

Οι πράξεις των διανυσμάτων: Πρόσθεση

Γεωμετρικά







Αλγεβρικά

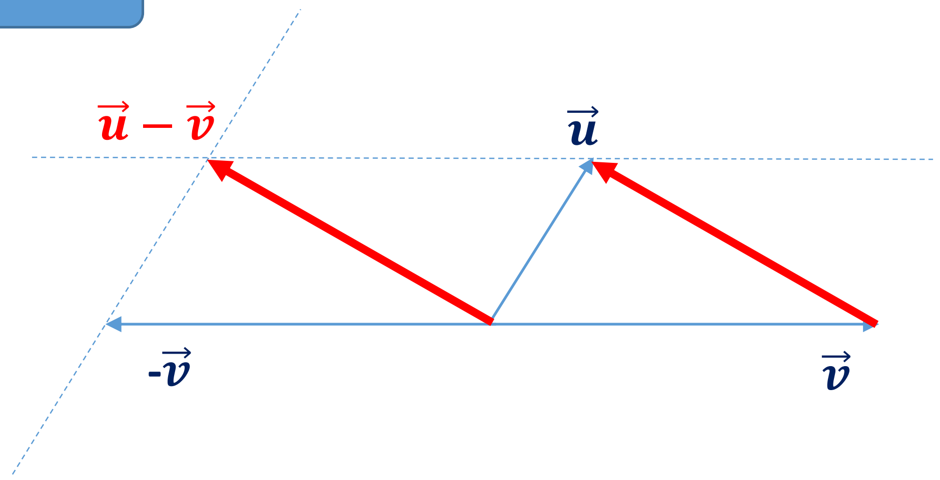
Στο επίπεδο, αν $\vec{u}=(u_1,u_2)$ και $\vec{v}=(v_1,v_2)$: $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$

Στο χώρο, αν $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ και $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$: $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$

Οι πράξεις των διανυσμάτων: Αφαίρεση

Ως διαφορά $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}$ δύο διανυσμάτων $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}$ ορίζουμε το άθροισμα $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} + (\overrightarrow{-\boldsymbol{v}})$

Γεωμετρικά

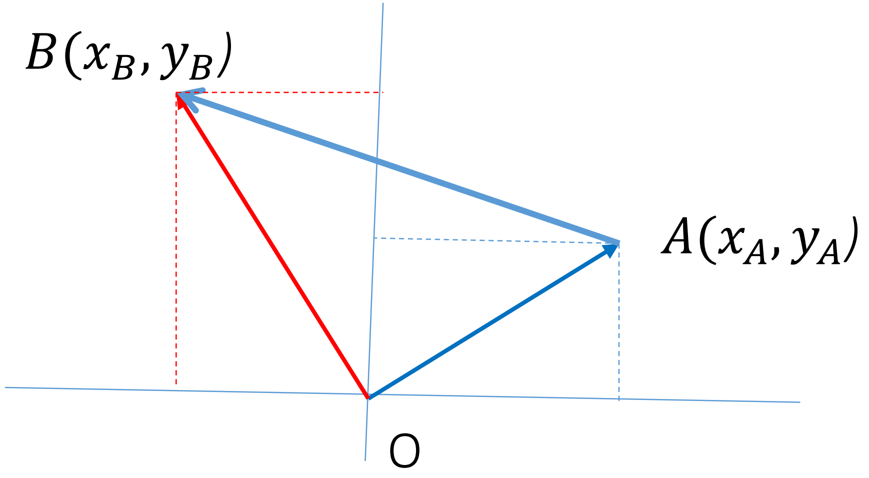


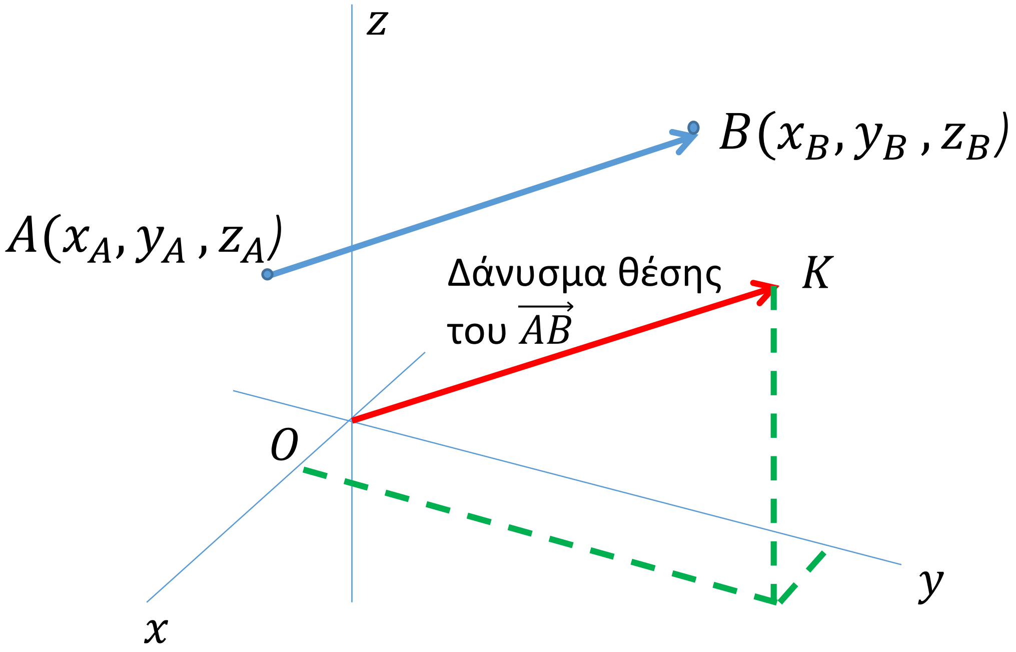
Αλγεβρικά

Στο επίπεδο, αν $\vec{u} = (u_1, u_2)$ και $\vec{v} = (v_1, v_2)$: $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Στο χώρο, αν $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$: $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$

Διάνυσμα που ορίζεται από δύο σημεία





Στο επίπεδο: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\boldsymbol{x_B - x_A}, \boldsymbol{y_B - y_A})$

Στο χώρο: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\boldsymbol{x_B - x_A}, \boldsymbol{y_B - y_A}, \boldsymbol{z_B - z_A})$

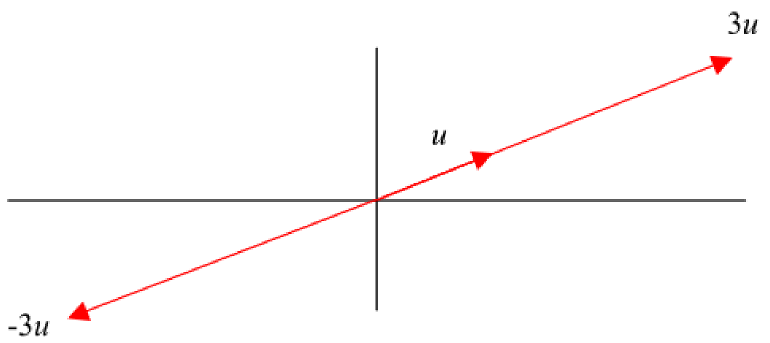
Από τις συντεταγμένες του πέρατος αφαιρούμε τις συντεταγμένες της αρχής.

Εφαρμογή της αφαίρεσης διανυσμάτων: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

Οι πράξεις των διανυσμάτων: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Γεωμετρικά

Διεύθυνση ίδια με το $\vec{u}$.
Μέτρο ίσο με |λ| φορές το μέτρο του $\vec{u}$.
Φορά ίδια με του $\vec{u}$ αν λ>0 και αντίθετη από το $\vec{u}$ αν λ<0



Αλγεβρικά

Στο επίπεδο, αν $\vec{u} = (u_1, u_2)$ και $\lambda \in R$ $(\lambda \neq 0)$: $\boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{\lambda} \cdot u_1, \boldsymbol{\lambda} \cdot u_2)$

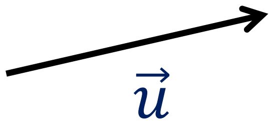
Στο χώρο, αν $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\lambda \in R$ $(\lambda \neq 0)$: $\boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{\lambda} \cdot u_1, \boldsymbol{\lambda} \cdot u_2, \boldsymbol{\lambda} \cdot u_3)$

Λέμε ότι το $\lambda \cdot \vec{u}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{u}$

Μέτρο ή μήκος διανύσματος

Γεωμετρικά

Το μήκος του βέλους (διανύσματος) $\vec{u}$



Αλγεβρικά

- Στο επίπεδο, αν $\vec{u} = (u_1, u_2)$: $\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{{u_1}^{\mathbf{2}} + {u_2}^{\mathbf{2}}}$

Στο επίπεδο, για διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ που ορίζεται από τα σημεία $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$:

$$\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^{\mathbf{2}} + (y_B - y_A)^{\mathbf{2}}}$$

- Στο χώρο, αν $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{{u_1}^{\mathbf{2}} + {u_2}^{\mathbf{2}} + {u_3}^{\mathbf{2}}}$

Στο χώρο, για διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ που ορίζεται από τα σημεία $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$:

$$\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^{\mathbf{2}} + (y_B - y_A)^{\mathbf{2}} + (z_B - z_A)^{\mathbf{2}}}$$

Τριγωνική Ανισότητα: $\|\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}\| \leq \|\vec{\boldsymbol{u}}\| + \|\vec{\boldsymbol{v}}\|$

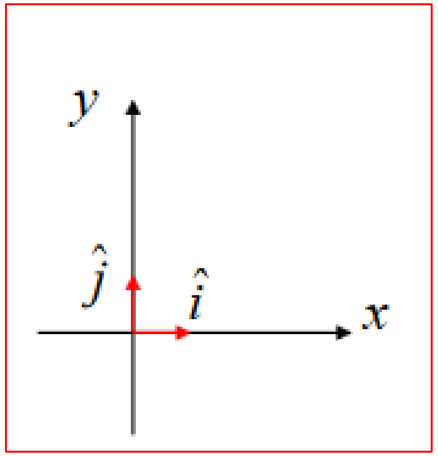
Μοναδιαίο στην ίδια κατεύθυνση: $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

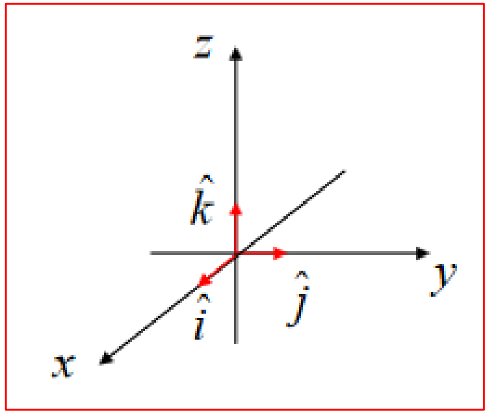
Μοναδιαία διανύσματα

Γεωμετρικά

Τα $\vec{i}, \vec{j}$ και $\vec{k}$

Έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα
Δείχνουν προς τη θετική φορά των αξόνων
Είναι κάθετα μεταξύ τους





Αλγεβρικά

Στο επίπεδο: $\vec{i} = (1, 0)$ και $\vec{j} = (0, 1)$

Στο χώρο: $\vec{i} = (1, 0,0)$, $\vec{j} = (0, 1,0)$ και $\vec{k} = (0, 0,1)$

Αναπαράσταση διανύσματος ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων

Αλγεβρικά

Στο επίπεδο: $\vec{i} = (1, 0)$ και $\vec{j} = (0, 1)$

Στο επίπεδο, $\vec{u} = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}) = (u_1, 0) + (0, u_2) = u_1 \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{0}) + u_2 \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \boldsymbol{u_1} \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{u_2} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}$

Στο χώρο: $\vec{i} = (1, 0,0)$, $\vec{j} = (0, 1,0)$ και $\vec{k} = (0, 0,1)$

Στο χώρο, $\vec{u} = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}) = (u_1, 0, 0) + (0, u_2, 0) + (0, u_3, 0) =$

$= u_1 \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + u_2 \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) + u_2 \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) = \boldsymbol{u_1} \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{u_2} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{u_3} \cdot \vec{\boldsymbol{k}}$