ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα

9. Επίλυση Γραμμικού Συστήματος

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, A \in M_{n \times n}$$

Μέθοδος Cramer

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

- **Στην παράγραφο αυτή,**
- **θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της <u>ορίζουσας</u> ενός τετραγωνικού πίνακα για να βρούμε έναν τύπο για τη λύση ενός συστήματος $n \times n$ (n εξισώσεων με n αγνώστους).**

Επίλυση γραμμικού συστήματος $A \cdot \vec{x} = \vec{b},\ A \in M_{n\times n}$

Ονομάζουμε A_i , τον πίνακα που προκύπτει όταν αντικαταστήσουμε την i-στήλη με την στήλη των σταθερών όρων $\vec{b}$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- **1) Αν $detA \neq 0$, τότε το σύστημα έχει <u>μοναδική λύση</u> την**

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

- **2α) Αν $detA = 0$, και <u>τουλάχιστον μία</u> από τις ορίζουσες $|A_i|$ είναι διάφορη του μηδενός, τότε το σύστημα είναι αδύνατο .**

- **2β) Αν $detA = 0$ και $detA_i = 0, \forall\, i \in N, 1 \leq i \leq n,$ τότε το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο.**

- **<u>Σημείωση</u>: Η μέθοδος ή κανόνας του Cramer χρησιμοποιείται <u>ΜΟΝΟ</u> όταν ο πίνακας είναι τετραγωνικός.**

Παράδειγμα 1 **Σύστημα 2 × 2 Μία και μοναδική λύση**

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \boxed{2} \\ 2x_1 - x_2 = \boxed{-3} \end{cases}$$

Λύση:

1) Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, αφού $detA \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση!

2) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες των A_1 και A_2 :

$$detA_1 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4$$

$$detA_2 = \begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}} \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7$$

3) Υπολογίζουμε τη λύση με τον τύπο :

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = \frac{|A_1|}{|A|} = -\frac{4}{5}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{7}{5}$$

Παράδειγμα 2

Σύστημα 2×2 Αδύνατο

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 8x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Λύση:

1) Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, αφού $detA = 0$ τότε το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση!

2) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες των A_1 και A_2 :

$$detA_1 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 \neq 0$$

$$detA_2 = \begin{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{vmatrix} = 0 - 8 = -8 \neq 0$$

Αφού μία τουλάχιστον $detA_i \neq 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο! (περίπτωση 2α)

Το σύστημα δεν έχει λύση, είναι αδύνατο!

Παράδειγμα 3

Σύστημα 3×3 Άπειρες λύσεις

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = \boxed{1} \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = \boxed{2} \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = \boxed{3} \end{cases}$$

το σύστημα σίγουρα <u>δεν</u> έχει μοναδική λύση!

Λύση:

1) Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} 2\cdot(8-1) + 1\cdot(12-5) + 3\cdot(3-10) = 0$$

2) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες των A_1 , A_2 και A_3:

$$detA_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = detA_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = detA_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$detA = detA_1 = detA_2 = detA_3 = 0$
(περίπτωση 2β)

Το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. <u>Χρειάζεται διερεύνηση</u>!

Παράδειγμα 3-λύση (συνέχεια)

Σύστημα 3× 3 Άπειρες λύσεις

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

3) Θα διερευνήσουμε αν είναι <u>αόριστο</u>. Θέτουμε $x_3 = t$, αντικαθιστούμε στις δύο πρώτες και έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3t = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 - 3t \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 - t \end{cases}$$

Και λύνουμε το 2×2 σύστημα:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1-3t & -1 \\ 2-t & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2-6t+2-t}{4+3} = -t + \frac{4}{7}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-3t \\ 3 & 2-t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4-2t-3+9t}{4+3} = t + \frac{1}{7}$$

Θα ελέγξουμε αν η λύση που βρήκαμε, ικανοποιεί την τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος.

Παράδειγμα 3-λύση (συνέχεια)

Σύστημα 3×3 Άπειρες λύσεις

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε όπου x_1 , x_2 τις τιμές που βρήκαμε παραπάνω και $x_3 = t$. Έχουμε:

$$5x_1 + x_2 + 4x_3 = 5\cdot\left(-t+\frac{4}{7}\right) + \left(t+\frac{1}{7}\right) + 4\cdot t = -5t + \frac{20}{7} + t + \frac{1}{7} + 4t = \frac{21}{7} = 3$$

Άρα, επαληθεύεται και η τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος.
Επομένως το σύστημα είναι αόριστο με λύσεις της μορφής:

$$x_1 = -t + \frac{4}{7}, x_2 = t + \frac{1}{7}, x_3 = t, t \in R$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε και με τη βοήθεια του αλγορίθμου Gauss να δούμε αν είναι αόριστο ή αδύνατο.

Παράδειγμα 4

Σύστημα 3× 3 ομογενές / μία και μοναδική λύση

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Λύση:

1) Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \ (Sarrus) \Rightarrow$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση!

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι η μηδενική διότι όλες οι ορίζουσες θα είναι μηδέν αφού θα έχουν σίγουρα μία μηδενική στήλη. Επομένως η λύση είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 5 **Σύστημα 3×3 παραμετρικό**

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases}(\lambda+1)x+y+z=1\\ x+(\lambda+1)y+z=\lambda\\ x+y+(\lambda+1)z=\lambda^2\end{cases}$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in R$.

Λύση:

Αρχικά, υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος:

$$\det A=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3\\ 1 & \lambda+1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2\cdot(\lambda+3)$$

Ιδιότητα 7

Στην 1η γραμμή προσθέτω τις άλλες δύο

Ιδιότητα 7

Από την 2η και την 3η στήλη αφαιρώ την 1η .

Παράδειγμα 5-λύση (συνέχεια)

Σύστημα 3× 3 παραμετρικό

$$\begin{cases}(\lambda+1)x + y + z = 1\\ x + (\lambda+1)y + z = \lambda\\ x + y + (\lambda+1)z = \lambda^2\end{cases}$$

Υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες ορίζουσες:

$$detA_1 = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda & \lambda+1 & 1\\ \lambda^2 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda & 1 & 1-\lambda\\ \lambda^2 & 1-\lambda^2 & \lambda+1-\lambda^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1-\lambda\\ 1-\lambda^2 & \lambda+1-\lambda^2\end{vmatrix} =$$

$$= \lambda + 1 - \lambda^2 - (1-\lambda)\cdot\left(1-\lambda^2\right) = -\lambda^3 + 2\lambda = \lambda\cdot(-\lambda^2+2)$$

$$detA_2 = \begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & \lambda^2 & \lambda+1\end{vmatrix} = \cdots = 2\lambda^2 - \lambda = \lambda\cdot(2\lambda-1)$$

$$detA_3 = \begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda^2\end{vmatrix} = \cdots = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = \lambda\cdot(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda - 1)$$

Παράδειγμα 5-λύση (συνέχεια)

Σύστημα 3×3 παραμετρικό

$$\begin{cases}(\lambda+1)x+y+z=1\\ x+(\lambda+1)y+z=\lambda\\ x+y+(\lambda+1)z=\lambda^2\end{cases}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $detA\neq 0 \Leftrightarrow$ $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq -3$, τότε το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την:

$$x=\frac{detA_1}{detA}=\frac{\lambda\cdot(-\lambda^2+2)}{\lambda^2\cdot(\lambda+3)}=\frac{-\lambda^2+2}{\lambda^2+3\lambda}$$

$$y=\frac{detA_2}{detA}=\frac{\lambda\cdot(2\lambda-1)}{\lambda^2\cdot(\lambda+3)}=\frac{2\lambda-1}{\lambda^2+3\lambda}$$

$$z=\frac{detA_3}{detA}=\frac{\lambda\cdot(\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1)}{\lambda^2\cdot(\lambda+3)}=\frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda^2+3\lambda}$$

Παράδειγμα 5-λύση (συνέχεια)

Σύστημα 3×3 παραμετρικό

$$\begin{cases}(\lambda+1)x+y+z=1\\ x+(\lambda+1)y+z=\lambda\\ x+y+(\lambda+1)z=\lambda^2\end{cases}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

2) Αν $\boldsymbol{\lambda=0}$, τότε το σύστημα έχει:

$\boldsymbol{detA=0}$ **και** $\boldsymbol{detA_1=detA_2=detA_3=0}$ ⇒ **Το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. Χρειάζεται διερεύνηση! (περίπτωση 2β)**

Αντικαθιστούμε στο αρχικό σύστημα όπου $\lambda=0$, και έχουμε:

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ x+y+z=0\\ x+y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=1\\ x+y+z=0\end{cases}$$

⇒ **Το σύστημα είναι αδύνατο**

3) Αν $\boldsymbol{\lambda=-3}$, τότε το σύστημα έχει:

$\boldsymbol{detA=0}$ **και** $\boldsymbol{detA_1=27-6=21\neq 0}$ ⇒ **Το σύστημα είναι αδύνατο! (περίπτωση 2α)**

Άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση

1) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 4x+4y+z=5 \\ 6x+6y+2z=13 \end{cases}$. [αδύνατο, $detA=0$ και $detA_1=-7\neq 0$]

2) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} -3x+6y-11z=5 \\ 3x-4y+6z=-2 \\ 4x-8y+13z=4 \end{cases}$. [$detA=10, x=-7.2, y=-2.5, z=-6.4$]

3) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in R$.

4) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+\lambda y-z=2 \\ 2x-y+\lambda z=5 \\ x+10y-6z=\mu \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in R$.