ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ
"ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ"
(Γ. Σμυρλής)

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0, \pi] \\ \sin x, & x \in (\pi, 2\pi] \\ \cos x, & x \in (2\pi, 3\pi]. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, 3\pi]$ και να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_0^{3\pi} f(x)dx$. Έχει η f παράγουσα στο $[0, 3\pi]$; [Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.]

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : [1,\ 2] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός στο } [1,\ 2] \\ -1, & x \text{ άρρητος στο } [1,\ 2] \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x, & x \text{ ρητός στο } [1,\ 2] \\ -x, & x \text{ άρρητος στο } [1,\ 2]. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι οι f, g **δεν** είναι ολοκληρώσιμες στο $[1, 2]$. [Για την f να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό της ολοκληρωσιμότητας Riemann.]

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin x}\, dx$.

Υπόδειξη: Αντικατάσταση $x = \dfrac{\pi}{2} - 2t$.

4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\, dx$.

Υπόδειξη: Αντικατάσταση $x = \dfrac{\pi}{4} - t$. Θα χρειαστείτε και την ταυτότητα

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

5. Έστω $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ ολοκληρώσιμη και $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

Υπόδειξη: Θεώρημα Bolzano σε κατάλληλη συνάρτηση.

6. Να προσδιοριστεί συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ τέτοια ώστε

$$f(x) = (1+x^2)\left(1 \;+\; \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dx\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. (i) Να δείξετε ότι αν $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ **συνεχής**, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$(\; f(x) = 0, \;\; \forall x \in [a,b] \;) \iff \int_a^b f(x)dx = 0.$$

(ii) Αν $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ **ολοκληρώσιμη**, ισχύει πάντα η παραπάνω ισοδυναμία; (Αν όχι, να δώσετε κάποιο αντιπαράδειγμα.)

(iii) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ τέτοια ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx \;=\; \int_0^1 xf(x)dx \;=\; \int_0^1 x^2 f(x)dx = 1.$$

8. Για τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι ολοκληρώσιμες στο $[0,1]$ και εάν έχουν παράγουσα στο $[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Για την $k(x)$ να θεωρήσετε και τη συνάρτηση

$$K(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \in (0,1] \\ \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus A \\ \\ 1, & x \in A \end{cases} ,$$

όπου $A = \left\{ 1 - \dfrac{1}{n} : n = 2, 3, 4, \ldots \right\}$. Να δείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Να χρησιμοποιήσετε το **ΒΑΣΙΚΟ ΛΗΜΜΑ:** "Εάν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη στο $[a,b]$ και ολοκληρώσιμη σε ***κάθε*** υποδιάστημα $[c,d] \subset (a,b)$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$."