1. Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά γύρω από το σημείο $a = 4$ τη συνάρτηση $f(x) = \ln(2x-3)$, δίνοντας και το αντίστοιχο διάστημα σύγκλισης.

ΛΥΣΗ:
Θέτουμε $y = x - 4$ οπότε

$$\begin{aligned}\ln(2x-3) = \ln(2y+5) &= \ln 5 \;+\; \ln\left(1+\frac{2y}{5}\right) = \ln 5 \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{2y}{5}\right)^{n+1} \\ &= \ln 5 \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}(x-4)^{n+1},\end{aligned}$$

για

$$-1 \;<\; \frac{2y}{5} \;\leq\; 1 \;\;\Leftrightarrow\;\; -\frac{5}{2} \;<\; y \;\leq\; \frac{5}{2} \;\;\Leftrightarrow\;\; -\frac{5}{2} \;<\; x-4 \;\leq\; \frac{5}{2} \;\;\Leftrightarrow\;\; \frac{3}{2} \;<\; x \;\leq\; \frac{13}{2}\;.$$

2. Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά γύρω από το σημείο $a = 0$ τη συνάρτηση $f(x) = x^2\cos(x^2)$ και να υπολογίσετε τις παραγώγους $f^{(10)}(0),\ f^{(11)}(0)$.

ΛΥΣΗ:
Γνωρίζουμε ότι

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Θέτοντας όπου ‘‘x’’ το x^2 παίρνουμε

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \frac{x^{16}}{8!} - \ldots, \qquad x \in \mathbb{R}$$

και άρα

$$f(x) = x^2\cos(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{10}}{4!} - \frac{x^{14}}{6!} + \frac{x^{18}}{8!} - \ldots, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Οι συντελεστές των $x^{10},\ x^{11}$ στο παραπάνω ανάπτυγμα είναι $\dfrac{1}{4!}$ και 0 αντίστοιχα , οπότε

$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = \frac{1}{4!} \;\Rightarrow\; f^{(10)}(0) = \frac{10!}{4!}$$

και

$$\frac{f^{(11)}(0)}{11!} = 0 \;\Rightarrow\; f^{(11)}(0) = 0.$$

3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3)\;-\;1}{\sin(x^2)\;-\;x^2}\;.$$

ΛΥΣΗ: Γνωρίζουμε ότι

$$\cos x\;-\;1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Θέτοντας όπου "x" το x^3 παίρνουμε

$$\cos(x^3)\;-\;1 = -\frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{18}}{6!} + \ldots = x^6\varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

όπου φ συνεχής συνάρτηση με $\varphi(0) = -1/2!$.

Επίσης,

$$\sin x\;-\;x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Θέτοντας όπου "x" το x^2 παίρνουμε

$$\sin(x^2)\;-\;x^2 = -\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots = x^6 g(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

όπου g συνεχής συνάρτηση με $g(0) = -1/3!$.

Το ζητούμενο όριο τώρα γράφεται

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6\varphi(x)}{x^6 g(x)} = \frac{-1/2!}{-1/3!} = 3.$$