ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ
"ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ"
(Γ. Σμυρλής)

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx, \quad \int x\sqrt{1-x}dx, \quad \int e^x(\ln|\cos x| - \tan x)dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x} \ .$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα (προτείνεται η ολοκλήρωση κατά παράγοντες):

$$\int x\cos x dx, \quad \int x\sin^2 x, \quad \int x\cos x\cos(2x), \quad \int x^2 \sin x\cos x dx,$$

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx, \quad \int \cos(\ln x)dx, \quad \int \text{Arcsin}x dx, \quad \int \frac{x}{\sin^2 x}dx, \quad \int \frac{x^4}{(x^2+1)^2}dx,$$

$$\int x\text{Arctan}x dx, \quad \int \frac{x\text{Arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}dx \ .$$

3. Θέτουμε

$$I_k = \int \sin^k x, \quad J_k = \int \cos^k x dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(i) Να δείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$,

$$I_k = \frac{k-1}{k}I_{k-2} \ - \ \frac{1}{k}\sin^{k-1} x\cos x, \quad J_k = \frac{k-1}{k}J_{k-2} \ + \ \frac{1}{k}\cos^{k-1} x\sin x.$$

(ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int \sin^6 x dx, \qquad \int \frac{dx}{\cos^6 x} \ .$$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα (προτείνεται η μέθοδος της αντικατάστασης):

$$\int (1-x)^{100} x^2 dx, \quad \int \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}} dx, \quad \int \frac{dx}{x(x^7-1)}, \quad \int x^5 e^{x^3} dx,$$

$$\int \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} dx, \quad \int \sin^5 x dx, \quad \int \frac{\sin(2x)\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)^2} dx, \quad \int e^{2x}\cos(e^x) dx,$$

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx, \quad \int \sin(\sqrt{x}) dx, \quad \int \frac{\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}} dx.$$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx, \quad J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

6. Θέτουμε

$$I_n = \int (\tan x)^n dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

(i) Να δείξετε ότι

$$I_n = \frac{1}{n-1}(\tan x)^{n-1} - I_{n-2}, \quad \text{για κάθε } n \geq 2.$$

(ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int \tan^4 x dx, \quad \int x \tan^4 x dx, \quad \int \frac{x^4 \mathrm{Arctan} x}{x^2+1} dx.$$

7. Με τη μέθοδο ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{x^3+x^2+x-1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx, \quad \int \frac{x^5+2}{x^2-1} dx, \quad \int \frac{dx}{x^4-4}, \quad \int \frac{-x^3+2x^2-3x+1}{x(x^2+1)^2} dx,$$

$$\int \frac{x^3+8}{x^3-2x^2-x+2} dx, \quad \int \frac{x+2}{(x+1)^3(x-2)} dx, \quad \int \frac{3x-5}{(x^2-2x+5)^2} dx, \quad \int \frac{dx}{x^4+4}.$$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα (προτείνεται η αναγωγή σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης μέσω κατάλληλης αντικατάστασης):

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx, \quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx, \quad \int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}, \quad \int \frac{\cos x}{2\cos x + \sin x + 3}dx \ ,$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx, \quad \int \sin^5 x \cos^2 x dx, \quad \int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x}dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} \ ,$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 4}dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}, \quad \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx, \quad \int \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx \ .$$

9. Θέτουμε

$$I = \int \sin^2 x \cos^4 x dx, \qquad J = \int \cos^2 x \sin^4 x dx.$$

Να υπολογίσετε τα $I + J, \ \ I - J, \ \ I, \ \ J.$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} \ ,$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$

$$2\sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y), \quad 2\cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y),$$

$$2\sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y).$$