Παραγώγιση δυναμοσειράς.

Λήμμα: Έστω $x_0,\ h \in \mathbb{R},\ \delta > 0,\ n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$, ώστε $|h| \leq \delta$. Τότε,

$$| \ (x_0 + h)^n \ - \ x_0^n \ - \ nhx_0^{n-1} \ | \ \leq \ \frac{h^2}{\delta^2}(\ |x_0| \ + \ \delta \ )^n.$$

Απόδειξη:
–Για $n = 1$, προφανώς ισχύει.
–Έστω $n \geq 2$. Έχουμε:

$$(x_0 + h)^n \ - \ x_0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k \ - \ x_0^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k.$$

Για $k = 1$ στο παραπάνω άθροισμα παίρνουμε nhx_0^{n-1}, οπότε

$$(x_0 + h)^n \ - \ x_0^n \ - \ nhx_0^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k,$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \ | \ (x_0 + h)^n \ - \ x_0^n \ - \ nhx_0^{n-1} \ | \ &\leq \ \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |h|^k \ = \ h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |h|^{k-2} \\
&\leq \ h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} \delta^{k-2} = \frac{h^2}{\delta^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} \delta^k \\
&\leq \ \frac{h^2}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} \delta^k = \frac{h^2}{\delta^2}(\ |x_0| \ + \ \delta \ )^n.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 1: Έστω $R \in (0,\ \infty]$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R,\ R).$$

Τότε, f παραγωγίσιμη στο $(-R,\ R)$ με

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad x \in (-R,\ R).$$

Απόδειξη: Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

ισούται με R διότι

$$\limsup_n \sqrt[n]{n|c_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} = 1/R.$$

Συνεπώς, ορίζεται η συνάρτηση

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad x \in (-R,\ R).$$

Έστω $x_0 \in (-R,\ R)$.
Επιλέγουμε $\delta > 0,\ h \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$0 \ < \ \delta \ < \ R \ - \ |x_0|, \quad 0 < |h| < \delta.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} |\ f(x_0+h) \ - \ f(x_0) \ - \ h\ g(x_0)| \ &= \ \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n[\ (x_0+h)^n \ - \ x_0^n \ - \ nhx_0^{n-1}\ ] \right| \\ &\le \ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot |\ (x_0+h)^n \ - \ x_0^n \ - \ nhx_0^{n-1}| \\ &\le \ \frac{h^2}{\delta^2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|(\ |x_0| \ + \ \delta\ )^n \end{aligned}$$

(βλ. Λήμμα παραπάνω).

Επειδή $0 < |x_0| + \delta < R$, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\ |x_0| \ + \ \delta\ )^n$$

συγκλίνει απόλυτα.

Θέτουμε

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|(\ |x_0| \ + \ \delta \ )^n.$$

Τότε,

$$| \ f(x_0+h) \ - \ f(x_0) \ - \ h \ g(x_0)| \ \leq \ \frac{M}{\delta^2} h^2$$

$$\Longrightarrow \ \left| \ \frac{f(x_0+h) \ - \ f(x_0)}{h} \ - \ g(x_0) \right| \ \leq \ \frac{M}{\delta^2}|h|,$$

για $0 < |h| < \delta$.

Από κριτήριο παρεμβολής, παίρνουμε

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) \ - \ f(x_0)}{h} = g(x_0),$$

που σημαίνει ότι f παραγωγίσιμη στο x_0 με

$$f'(x_0) = g(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x_0^{n-1}.$$

□

Θεώρημα 2 (Γενίκευση του Θ.1): Έστω $R \in (0, \ \infty]$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad x \in (a-R, \ a+R).$$

Τότε, f παραγωγίσιμη στο $(a-R, \ a+R)$ με

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}, \quad x \in (a-R, \ a+R).$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_a(t) = f(t+a), \quad t \in (-R, \ R).$$

Σημ. ότι για $t \in (-R, \ R)$, ισχύει $t+a \in (a-R, \ a+R)$, οπότε η f_a ορίζεται καλώς. Επίσης,

$$f_a(t) = f(t+a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad t \in (-R,\ R).$$

Σύμφωνα με το Θ.1, η f_a είναι παραγωγίσιμη στο $(-R,\ R)$ με

$$f_a'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}, \quad t \in (-R,\ R).$$

Αλλά,

$$f(x) = f_a(x-a), \quad \forall\, x \in (a-R,\ a+R),$$

οπότε f παραγωγίσιμη στο $(a-R,\ a+R)$ με

$$f'(x) = f_a'(x-a) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}, \quad \forall\, x \in (a-R,\ a+R).$$

$\square$