Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης.

Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες θετικών όρων ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in [0,\ +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

– Εάν $L > 0$, τότε οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

– Εάν $L = 0$ και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει , τότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

– Εάν $L = +\infty$ και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει , τότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Παραδείγματα:
(i) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ , \quad a_n = \frac{n}{n^3+1}.$$

Λύση: Θέτουμε $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Τότε, η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1 \in (0,\ +\infty).$$

Άρα και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

(ii) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ , \quad a_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}.$$

Λύση: Θέτουμε $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Τότε, η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}\sqrt{1+\dfrac{1}{n^3}}} = 1 \in (0,\ +\infty).$$

Άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

Γενικότερα, αν $a_n = \Pi(n)/Q(n)$, όπου $\Pi(n)$, $Q(n)$ **πολυωνυμικές εκφράσεις** του n, τότε θέτουμε

$$b_n = \frac{1}{n^p}, \qquad p = \text{βαθμός}(Q(n)) \ - \ \text{βαθμός}(\Pi(n))$$

και εργαζόμαστε όπως στα παραπάνω παραδείγματα.

(iii) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ , \quad a_n = \frac{\ln(n)}{n^r}, \ \ r > 1.$$

Λύση: Επιλέγουμε $p \in (1,\ r)$ και θέτουμε $b_n = \dfrac{1}{n^p}$. Τότε, η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.
Επιπλέον,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^{r-p}} = 0.$$

Πράγματι, $\lim_{x\to+\infty} x^{r-p} = +\infty$ οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hospital παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{r-p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{r-p+1}} = 0.$$

Άρα και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Κριτήριο του Leibniz.

Έστω (a_n) **φθίνουσα** ακολουθία θετικών όρων ώστε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Τότε, η **εναλλάσσουσα σειρά**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

συγκλίνει.

Παραδείγματα:
(i) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,.$$

Συγκλίνει απόλυτα;
Λύση: Εφαρμόζεται άμεσα το Κριτήριο του Leibniz οπότε η σειρά συγκλίνει.
Δεν συγκλίνει απόλυτα διότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,.$$

(ii) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

Συγκλίνει απόλυτα;
Λύση: Η συνάρτηση $\sin x$ είναι γν. αύξουσα στο διάστημα $[0,\pi/2]$. Για κάθε $n \geq 1$,

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$$

οπότε

$$0 < \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) < \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Επίσης, προφανώς
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$
Με βάση τα παραπάνω, εφαρμόζεται το Κριτήριο του Leibniz οπότε η σειρά συγκλίνει.
Η σειρά με απόλυτες τιμές γράφεται
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Αλλά
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$$
και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.
Από το Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης έπεται ότι η σειρά με απόλυτες τιμές αποκλίνει.