Δίνεται η αναδρομικά οριζόμενη ακολουθία (a_n) με

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + 2a_n}{1 + a_n}, \;\; \forall n \geq 1.$$

Να δείξετε ότι η (a_n) συγκλίνει και να βρείτε το $\lim a_n$.

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος (ο συνήθης):
Ξεκινάμε με μια άτυπη διαδικασία.

Εάν γνωρίζουμε ότι η (a_n) συγκλίνει με $\lim a_n = L \in \mathbb{R}$, τότε παίρνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ και στα δύο μέλη της αναδρομικής σχέσης έχουμε

$$L = \frac{1 + 2L}{1 + L} \;\Rightarrow\; L^2 - L - 1 = 0 \;\Rightarrow\; L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Επειδή προφανώς $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$, έπεται ότι $L = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Τώρα, προχωρούμε στην τυπική λύση .

Παρατηρούμε ότι $a_1 = 1 \;<\; L = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Ισχυρισμός: $a_n \;<\; L$, $\forall n \geq 1$.
Απόδειξη του ισχυρισμού:
– Για $n = 1$ ισχύει.
–Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n \geq 1$. Τότε,

$$a_{n+1} - L \;=\; \frac{1 + 2a_n}{1 + a_n} - L = \frac{1 + 2a_n - L - La_n}{1 + a_n} = \frac{L^2 - L + 2a_n - L - La_n}{1 + a_n} = \frac{(L - a_n)(L - 2)}{1 + a_n} \;<\; 0.$$

Σημ. ότι $L^2 - L = 1$ και $L = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} < 2$.

Τώρα έχουμε $\forall n \geq 1$,

$$a_{n+1} - a_n \;=\; \frac{1 + 2a_n}{1 + a_n} \;-\; a_n = \frac{1 + 2a_n - a_n - a_n^2}{1 + a_n} = -\frac{a_n^2 - a_n - 1}{1 + a_n} \;>\; 0,$$

διότι $0 \;<\; a_n \;<\; L$ και συνεπώς το a_n βρίσκεται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου $x^2 - x - 1$.

Η απόδειξη του ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.

Άρα, (a_n) γν. αύξουσα και φραγμένη άνω, οπότε συγκλίνει. Από τη διαδικασία που περιγράφεται στην αρχή της λύσης, παίρνουμε $\lim a_n = L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2ος τρόπος (συντομότερος αλλά δεν δουλεύει πάντα):
Παρατηρούμε ότι

$$a_n > 0, \quad a_{n+1} = 2 \, - \, \frac{1}{1+a_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Προκύπτει άμεσα ότι $a_{n+1} < 2$, $\forall n \geq 1$ και άρα η (a_n) είναι φραγμένη άνω.

Ισχυρισμός: $a_n \, < \, a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$.
Απόδειξη του ισχυρισμού:
–Για $n = 1$ ισχύει, διότι $a_2 = 2 - \dfrac{1}{1+a_1} = 2 - \dfrac{1}{1+1} = 2 - 1/2 = 3/2 > 1 = a_1$.

–Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n \geq 1$. Τότε,

$$0 < \; a_n \; < \; a_{n+1} \; \Rightarrow \; -\frac{1}{a_n} \; < \; -\frac{1}{a_{n+1}} \; \Rightarrow \; 2 - \frac{1}{a_n} \; < \; 2 - \frac{1}{a_{n+1}} \; \Rightarrow \; a_{n+1} \; < \; a_{n+2},$$

οπότε ισχύει και για $n+1$.
Η απόδειξη του ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.

Άρα, (a_n) γν. αύξουσα και φραγμένη άνω, οπότε συγκλίνει. Από τη διαδικασία που περιγράφεται στην αρχή του α′ τρόπου λύσης, παίρνουμε $\lim a_n = L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.