ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ
(Γ. ΣΜΥΡΛΗΣ)

Με $\mathbb{R}[x]$ συμβολίζουμε όλα τα πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές.

Ορισμός 1: Δύο μη μηδενικά πολυώνυμα $f, g \in \mathbb{R}[x]$ λέγονται **πρώτα** μεταξύ τους, αν δεν έχουν κοινούς παράγοντες εκτός των σταθερών πολυωνύμων.

Θεώρημα 1: Εάν $f, g \in \mathbb{R}[x]$ μη μηδενικά και πρώτα μεταξύ τους, τότε $\exists\, k(x),\ \lambda(x) \in \mathbb{R}[x]$ ώστε

$$1 = k(x)f(x) + \lambda(x)g(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε

$$J = \{\ k \cdot f + \lambda \cdot g :\ k, \lambda \in \mathbb{R}[x]\ \}.$$

Παρατηρούμε ότι:

- $f,\ g \in J$.
- Εάν $p,\ q \in J$, τότε $p \pm q \in J$.
- Εάν $p \in J,\ h \in \mathbb{R}[x]$, τότε $h \cdot p \in J$.

Έστω d **ελαχίστου βαθμού** μη μηδενικό πολυώνυμο του συνόλου J.

Ισχυρισμός: Το πολυώνυμο d είναι παράγοντας κάθε πολυωνύμου του συνόλου J.

Πράγματι, έστω $p \in J$.

Από την ταυτότητα της διαίρεσης, $\exists\, \pi(x),\ \upsilon(x) \in \mathbb{R}[x]$ ώστε

$$p(x) = \pi(x)d(x) + \upsilon(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \deg(\upsilon)\ <\ \deg(d) \quad \text{ή} \quad \upsilon \equiv 0.$$

Τότε, $\upsilon = p - \pi \cdot d \in J$ (βλ. παρατήρηση παραπάνω). Αν το υ ήταν μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε θα ήταν ένα μη μηδενικό πολυώνυμο του συνόλου J με βαθμό μικρότερο από το βαθμό του d (ΑΤΟΠΟ!). Άρα, $\upsilon \equiv 0$, οπότε το d είναι παράγοντας του p κι έτσι αποδείξαμε τον ισχυρισμό.

Έπεται ότι το πολυώνυμο d είναι **κοινός** παράγοντας των $f,\ g$ τα οποία είναι **πρώτα μεταξύ τους.** Άρα, $d(x) = c =$ σταθερά, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Έπεται ότι $1 = \frac{1}{c} \cdot c \in J$ (βλ. τρίτη παρατήρηση παραπάνω), που είναι και η αποδεικτέα. $\square$

Πόρισμα 1: Εάν $f, g \in \mathbb{R}[x]$ πρώτα μεταξύ τους, τότε $\forall h \in \mathbb{R}[x]$, $\exists\, K(x),\ \Lambda(x) \in \mathbb{R}[x]$ ώστε
$$h(x) = K(x)f(x) + \Lambda(x)g(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Θεώρημα 2: Έστω $p, \varphi, q_1 \in \mathbb{R}[x]$ με φ, q_1 πρώτα μεταξύ τους, $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 1$ και Z το σύνολο των πραγματικών ριζών των φ, q_1. Τότε, $\exists\, \upsilon,\ p_1 \in \mathbb{R}[x]$ ώστε

$$\frac{p(x)}{[\varphi(x)]^m \cdot q_1(x)} = \frac{\upsilon(x)}{[\varphi(x)]^m} + \frac{p_1(x)}{[\varphi(x)]^{m-1} \cdot q_1(x)}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus Z$$

και

$$\deg(\upsilon) < \deg(\varphi) \quad \text{ή} \quad \upsilon \equiv 0.$$

Απόδειξη: Από Πόρισμα 1, $\exists\, K(x),\ \Lambda(x) \in \mathbb{R}[x]$ ώστε

$$p(x) = K(x)\varphi(x) + \Lambda(x)q_1(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης, $\exists\, \pi(x),\ \upsilon(x) \in \mathbb{R}[x]$ ώστε

$$\Lambda(x) = \pi(x)\varphi(x) + \upsilon(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \deg(\upsilon) < \deg(\varphi) \quad \text{ή} \quad \upsilon \equiv 0.$$

Έχουμε,

$$p = K \cdot \varphi + \pi \cdot \varphi \cdot q_1 + \upsilon \cdot q_1 = (K + \pi \cdot q_1) \cdot \varphi + \upsilon \cdot q_1$$

$$\Longrightarrow p = p_1 \cdot \varphi + \upsilon \cdot q_1, \quad \text{όπου} \quad p_1 = K + \pi \cdot q_1\,.$$

Άρα,

$$\frac{p(x)}{[\varphi(x)]^m \cdot q_1(x)} = \frac{p_1(x)\varphi(x) + \upsilon(x)q_1(x)}{[\varphi(x)]^m \cdot q_1(x)} = \frac{p_1(x)}{[\varphi(x)]^{m-1} \cdot q_1(x)} + \frac{\upsilon(x)}{[\varphi(x)]^m}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash Z.$$

$\square$

Πόρισμα 2: Κάτω από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2, $\exists \upsilon_1\,, \upsilon_2\,, \ldots \upsilon_m\,, p_m \in \mathbb{R}[x]$ ώστε

$$\frac{p(x)}{[\varphi(x)]^m \cdot q_1(x)} = \frac{\upsilon_1(x)}{\varphi(x)} + \frac{\upsilon_2(x)}{\varphi(x)^2} + \ldots + \frac{\upsilon_m(x)}{\varphi(x)^m} + \frac{p_m(x)}{q_1(x)}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus Z$$

και

$$\deg(\upsilon_i) \ < \ \deg(\varphi) \quad ή \quad \upsilon_i \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots m.$$

Απόδειξη: Προκύπτει εύκολα με επαγωγή στο m και με χρήση του Θεωρήματος 2. $\square$

Εφαρμογή: Να αναλύσετε σε απλά κλάσματα τη ρητή συνάρτηση

$$\frac{p(x)}{(x-1)^3 \cdot (x^2+1)^2}, \quad \deg(p(x)) < 7.$$

Λύση: Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 2 για

$$\varphi(x) = x - 1, \quad q_1(x) = (x^2+1)^2$$

και παίρνουμε σταθερές $A_1,\ A_2,\ A_3$ και πολυώνυμο $p_3(x) \in \mathbb{R}[x]$ ώστε

$$\frac{p(x)}{(x-1)^3 \cdot (x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{p_3(x)}{(x^2+1)^2}, \quad \forall x \neq 1. \quad (1)$$

Επειδή $\deg(p(x)) < 7$, η (1) δίνει

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p_3(x)}{(x^2+1)^2} = 0. \qquad (2)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε ξανά το Πόρισμα 2 στη ρητή συνάρτηση

$$\frac{p_3(x)}{(x^2+1)^2}$$

για

$$\varphi(x) = x^2 + 1, \quad q_1(x) = 1$$

και παίρνουμε υ_1 , $\upsilon_2 \in \mathbb{R}[x]$ βαθμού το πολύ 1 και $p_4(x) \in \mathbb{R}[x]$ με

$$\frac{p_3(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{\upsilon_1(x)}{x^2+1} + \frac{\upsilon_2(x)}{(x^2+1)^2} + \frac{p_4(x)}{1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η τελευταία λόγω της (2) δίνει

$$\lim_{x \to +\infty} p_4(x) = 0 \Longrightarrow p_4 \equiv 0$$

(σημ. ότι το p_4 είναι πολυώνυμο!).

Συνεπώς,

$$\frac{p_3(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{\upsilon_1(x)}{x^2+1} \; + \; \frac{\upsilon_2(x)}{(x^2+1)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Από τις (1), (3) κι επειδή τα υ_1, $\upsilon_2 \in \mathbb{R}[x]$ είναι βαθμού το πολύ 1, παίρνουμε

$$\frac{p(x)}{(x-1)^3 \cdot (x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1 x + \Gamma_1}{x^2+1} + \frac{B_2 x + \Gamma_2}{(x^2+1)^2}\,,$$

όπου $B_1,\ B_2,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2 \in \mathbb{R}$.