ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2019-20

Κ. Παυλοπούλου

Εύρεση Αντίστροφου πίνακα:
$1^{ος}$ τρόπος (με στοιχειώδεις πράξεις)

Δίνεται ο πίνακας **A=**$\left(\boldsymbol{\alpha_{ij}}\right) \in \mathbf{M}_{\mu\times\mu}$.

Αν γράψουμε δίπλα στον πίνακα A τον μοναδιαίο I_μ και εφαρμόσουμε και στους δύο ταυτόχρονα τις ίδιες στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, ώστε ο πίνακας A να μετασχηματιστεί σε ανηγμένο κλιμακωτό A_R, τότε θα έχουμε:

$$\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{I}_\mu\right) \rightarrow \ \ldots \rightarrow (\mathrm{A}_R|\mathrm{B})$$

- Αν $\mathrm{A}_R = \mathrm{I}_\mu$ τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $B = A^{-1}$.
- Αν $\mathrm{A}_R \neq \mathrm{I}_\mu$ τότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος .

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

- Λύση:

$$(A|I_3) \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - 3\gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1} \ \dots \ \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I_3|B)$$

Παράδειγμα

- **Να εξεταστεί αν ο A είναι αντιστρέψιμος για τις διάφορες τιμές του α. Στην περίπτωση που είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο αντίστροφός του.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος

- $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 3\gamma_1}$

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha - 6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3}$

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha - 6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 8 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

- 1) Αν $\boldsymbol{\alpha \neq 8}$, τότε συνεχίζουμε:

- $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 8 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_3 \to \frac{1}{\alpha-8}\gamma_3}$$

- $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-8} & \frac{1}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} \end{array}\right) \xrightarrow[\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_3]{\gamma_2 \to \gamma_2 - \gamma_3}$$

- $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha-2}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} & \frac{4}{\alpha-8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{\alpha-8} & \frac{-1}{\alpha-8} & \frac{\alpha-6}{\alpha-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-8} & \frac{1}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} \end{array}\right)$

- Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος με

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-2}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} & \frac{4}{\alpha-8} \\ \frac{3}{\alpha-8} & \frac{-1}{\alpha-8} & \frac{\alpha-6}{\alpha-8} \\ \frac{-3}{\alpha-8} & \frac{1}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} \end{bmatrix}$$

- Αν ***α=8***, τότε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-8 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

- Άρα δεν είναι αντιστρέψιμος ο Α.

Εύρεση Αντίστροφου πίνακα:
2ος τρόπος (με χρήση συμπληρωματικού πίνακα)

Δίνεται ο πίνακας **A**$=\left(\boldsymbol{\alpha_{ij}}\right) \in \mathbf{M}_{\mu\times\mu}$. Ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $detA \neq 0$.

Αν $detA \neq 0$, τότε

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA}$$

- Κάθε πίνακας που προκύπτει από τον Α, αν διαγράψουμε την

i-γραμμή και την j-στήλη συμβολίζεται με A_{ij} και είναι μεγέθους $(\mu - 1) \times (\mu - 1)$.

- Ο πίνακας $\mu \times \mu$ ονομάζεται **προσαρτημένος ή συμπληρωματικός πίνακας του Α** ($adjA$) με στοιχεία τα $(-1)^{i+j} detA_{ji}$ στη θέση των $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$.

Παράδειγμα 1

- Δίνεται ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, τότε
- $A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right)$, $detA_{11} = 11$
- $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right)$, $detA_{12} = 0$

- $A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right), detA_{13} = 0$
- $A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right), detA_{21} = -3$
- κ.ο.κ.

- $adjA = \begin{bmatrix} detA_{11} & -detA_{21} & detA_{31} \\ -detA_{12} & detA_{22} & -detA_{32} \\ detA_{13} & -detA_{23} & detA_{33} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι τα πρόσημα εμφανίζονται εναλλάξ σύμφωνα με τη διάταξη της σκακιέρας

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Στη συνέχεια του έχουμε, ότι αφού $detA = 11 \neq 0$ υπάρχει αντίστροφος και είναι ο εξής:

$$\boxed{\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{11} \cdot adj\mathrm{A} = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}}$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A, αν υπάρχει, με τη μέθοδο του συμπληρωματικού πίνακα.

Λύση:

- $detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 0 + 12 = 18 \neq 0$$

- Υπολογίζουμε τον πίνακα:

$$adj\mathrm{A} = \begin{bmatrix} det\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} & -det\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 2\end{bmatrix} & det\begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 0\end{bmatrix} \\ -det\begin{bmatrix}-1 & 0\\-2 & 0\end{bmatrix} & det\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 2\end{bmatrix} & -det\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix} \\ det\begin{bmatrix}-1 & 3\\-2 & 0\end{bmatrix} & -det\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 0\end{bmatrix} & det\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 3\end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 0 & -6\\2 & 6 & -2\\6 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

<u>Απάντηση</u>

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{detA}\cdot adj\mathrm{A} = \frac{1}{18}\cdot\begin{bmatrix}6 & 0 & -6\\2 & 6 & -2\\6 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Ιδιότητες Αντιστρόφου
(εφόσον υπάρχουν οι αντίστροφοι)

- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$
- $(A^{\kappa})^{-1} = (A^{-1})^{k}$

Παράδειγμα 2

- **Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}$ με $\alpha \in R$. Να εξεταστεί αν υπάρχει ο αντίστροφός τους και αν ναι, να τον υπολογίσετε.**

- **Λύση:**

- **α) $detA = 12 - 12 = 0$. Άρα δεν είναι αντιστρέψιμος.**

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 3\gamma_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

- Β) Για τον πίνακα Β έχουμε:

$$(\mathbf{B}|\mathbf{I_2}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 3\gamma_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 6 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

- Παρατηρούμε ότι

- 1) αν α-6=0, δηλαδή α=6, τότε ο πίνακας Β δεν έχει αντίστροφο

διότι ο πίνακας $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$ δεν έχει στο αριστερό τμήμα τον μοναδιαίο I_2 , και επομένως ο Β δεν είναι αντιστρέψιμος.

- 2) Αν όμως α≠6 , τότε ο πίνακας

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-6 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{\alpha-6}\gamma_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\alpha}{\alpha-6} & -\frac{2}{\alpha-6} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{array}\right) = (\, I \mid B^{-1}) \,.$$

Άρα $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-6} & -\frac{2}{\alpha-6} \\ \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{bmatrix}, \gamma\iota\alpha\ \alpha \neq 6.$