ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2019-20

Κ. Παυλοπούλου

ΠΙΝΑΚΕΣ

Άσκηση 1

Να δειχτεί ότι αν ο πίνακας A είναι διαγώνιος

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a-b+1 & -a-b-c+2 \\ a^3+b^3+c^3-3abc & a+\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

, τότε ο πίνακας A είναι ο

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, δηλαδή ο μοναδιαίος 2x2.

Λύση

Αν ο Α είναι διαγώνιος τότε πρέπει:

$$-a-b-c+2=0$$

$$\kappa\alpha\iota\ a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

Όμως από την ταυτότητα του Euler έχουμε:

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

- Άρα λαμβάνουμε:

$$a^3 + b^3 + c^3 \ - 3abc = o \leftrightarrow$$

$$(a + b + c)\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] = 0 \,.$$

Άρα

$$2 \cdot \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] = 0 \leftrightarrow$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \leftrightarrow \alpha = b = c \,.$$

Επομένως a=b=c=2/3. Και προκύπτει από πράξεις ότι

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2 \,.$$

Άσκηση 2

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix}$ $και$ $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$,

Να προσδιοριστούν τα x, y, z έτσι ώστε να ισχύει:

$$\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 = (\mathrm{A} - \mathrm{B})(\mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

Λύση

Γενικά ισχύει η σχέση:

$$(\mathrm{A} - B)(\mathrm{A} + B) = A^2 - B^2 + \mathrm{AB} - \mathrm{BA}\,.$$

Η σχέση

$$\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 = (\mathrm{A} - \mathrm{B})(\mathrm{A} + \mathrm{B})$$

ισχύει αν και μόνο αν οι πίνακες Α, Β αντιμετατίθενται.

Σε αυτή την περίπτωση λαμβάνουμε:

$$AB = \begin{bmatrix} x & xy & 0 \\ xy & y & z \\ x & y & z^2 \end{bmatrix} \text{ και } BA = \begin{bmatrix} x & x^2 & 0 \\ y^2 & y & y \\ z & z & z^2 \end{bmatrix}$$

Επομένως η δοσμένη σχέση αληθεύει αν και μόνο αν:

$$xy = x^2, xy = y^2, \mathrm{y} = \mathrm{x}, \mathrm{y} = \mathrm{z}.$$

Άρα τελικά

$$x = y = z.$$

Άσκηση 3

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \Pi_\nu$.

Αν ικανοποιούν τις ιδιότητες:

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{I}_\nu \; \kappa\alpha\iota \; \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + I_\nu)$$

να δείξετε ότι

$$A^2 = \mathbf{A}.$$

Λύση:

$$A^2 = \mathrm{A} \cdot \mathrm{A} =$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{B} + I_\nu) \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{B} + I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}(\mathrm{B} + I_\nu)\,(\mathrm{B} + I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}(\mathrm{B} \cdot \mathrm{B} + I_\nu \cdot \mathrm{B} + \mathrm{B} \cdot I_\nu + I_\nu \cdot I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}\left(B^2 + \mathrm{B} + \mathrm{B} + I_\nu\right) =$$

$$\frac{1}{4}(I_\nu + 2 \cdot \mathrm{B} + I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}(2 \cdot \mathrm{B} + 2 \cdot I_\nu) =$$

$$\frac{2}{4}(\mathrm{B} + I_\nu) = \frac{1}{2}(\mathrm{B} + I_\nu) = \mathrm{A}.$$

Άσκηση 4

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \Pi_{\nu}$.

Αν ισχύει ότι $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_{\nu}$,

τότε να δείξετε ότι οι πίνακες A, B αντιμετατίθενται.

Λύση

- **Αφού $A^2 = I_{\nu}$ αυτό σημαίνει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ότι $A^{-1} = A$. (*)**
- **Ομοίως αφού $B^2 = I_{\nu}$ αυτό σημαίνει ότι ο B είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ότι $B^{-1} = B$. (**)**

Ομοίως αφού $(AB)^2 = I_\nu$ αυτό σημαίνει ότι ο AB είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ότι $(AB)^{-1} = AB$. (**)

Αλλά $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B \cdot A$, (λόγω των σχέσεων (*) και (**)).

Επομένως:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Άσκηση 5

Θεωρούμε τους τετραγωνικούς πίνακες A, B τάξης $n \times n$.
Αν ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος
και ισχύει ότι $A + B = A \cdot B$,
να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$A^{-1} + B^{-1} = I_n \, .$$

Λύση

- $\boldsymbol{A + B = A \cdot B}$
- $\boldsymbol{(A + B) \cdot B^{-1} = (A \cdot B\,) \cdot B^{-1}}$ *πολ/ζω με* $\boldsymbol{B^{-1}}$ *(Β αντιστρέψιμος)*
- $\boldsymbol{A \cdot B^{-1} + B \cdot B^{-1} = A \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right)}$ *επιμεριστική / προσεταιριστική*
- $\boldsymbol{A \cdot B^{-1} + I_n = A \cdot (I_n)}$
- $\boldsymbol{A \cdot B^{-1} + I_n = A}$
- $\boldsymbol{I_n = A - A \cdot B^{-1}}$
- $\boldsymbol{I_n = A \cdot \left(I_n - B^{-1}\right)}$, *δηλ. ο αντίστροφος του Α είναι ο* $\boldsymbol{I_n - B^{-1}}$
- Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$\boldsymbol{A^{-1} = I_n - B^{-1} \Leftrightarrow \quad A^{-1} + B^{-1} = I_n}$$

Άσκηση 6 **Αν** $A = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$

να υπολογίσετε τους πίνακες $\mathrm{A}^2, A^3, A^\rho$.

Λύση

$$A^2 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (cos\theta)^2 - (sin\theta)^2 & -2sin\theta cos\theta \\ 2sin\theta cos\theta & (cos\theta)^2 - (sin\theta)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos2\theta & -sin2\theta \\ sin2\theta & cos2\theta \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos2\theta & -\sin2\theta \\ \sin2\theta & \cos2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot \cos2\theta - \sin\theta \cdot \sin2\theta & -\sin\theta\cos2\theta - \cos\theta\sin2\theta \\ \sin\theta\cos2\theta + \cos\theta\sin2\theta & (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos3\theta & -\sin3\theta \\ \sin3\theta & \cos3\theta \end{bmatrix}$$

Ομοίως

$$\boxed{A^\rho = \begin{bmatrix} \cos\rho\theta & -\sin\rho\theta \\ \sin\rho\theta & \cos\rho\theta \end{bmatrix}}.$$

Άσκηση 7 **Να υπολογίσετε τη ν-οστή ($\nu \geq 1$) δύναμη του τετραγωνικού πίνακα A, όπου $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και του $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.**

Λύση

Παρατηρούμε ότι $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I_2 \ (\text{ή } A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_2 \cdot I_2 = I_2)$$

Επομένως:

$$A^\nu = \begin{cases} I_2, & \text{αν } \nu = 2\rho, \rho \in \mathrm{N} \\ \mathrm{A}, & \text{αν } \nu = 2\rho + 1, \rho \in N \end{cases}$$

Απόδειξη επαγωγικά

Άσκηση 8

Δίνεται τετραγωνικός πίνακας $A \in \Pi_n$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος και τέτοιος ώστε: $A^{-1} = I_n - A$. Να δείξετε ότι: $A^6 - I_n = O_n$.

Λύση

Αφού Α αντιστρέψιμος, προκύπτει ότι: $A \cdot A^{-1} = I_n$.

Επομένως: $I_n = A \cdot (I_n - A) = A \cdot I_n - A \cdot A$

$$I_n = A - A^2$$

$$A - A^2 - I_n = O_n \quad (1)$$

$$A^2 - A + I_n = O_n$$

$$A \cdot \left(A^2 - A + I_n\right) = A \cdot O_n$$

$$A^3 - A^2 + A = O_n \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$A^3 + I_n = O_n \rightarrow A^3 = -I_n \,.$$

Άρα

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = (-I_n) \cdot (-I_n) =$$
$$(-1) \cdot (-1) \cdot (I_n)^2 = 1 \cdot I_n = I_n.$$

Επομένως:

$$\boxed{A^6 - I_n = O_n}$$