Ορίζουσες

Παυλοπούλου Κάλλια

2018-2019

Ορίζουσα 2x2 (2ης τάξης)

- Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \in M_{2x2}$.

- Η ορίζουσα του A είναι ο αριθμός

$$detA = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{21} \cdot \alpha_{12}$$

Ορίζουσα 3×3 ($3^{ης}$ τάξης)

- Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}$.

- Η ορίζουσα του Α είναι ο αριθμός

$$detA = \alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{33} + \alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{31} + \alpha_{13}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{32} -$$

$$\alpha_{12}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{33} - \alpha_{11}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{32} - \alpha_{13}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{31}$$

Υπολογισμός ορίζουσας 3×3 (3ης τάξης)
Κανόνας του Sarrus: ξαναγράφουμε τις δυο πρώτες στήλες και φτιάχνουμε τα 6 γινόμενα ως εξής:

(+) (+) (+) (-) (-) (-)

- **Δίνεται ο πίνακας** $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{matrix}$

Παράδειγμα:

- Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3x3}$.
- Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης:
- $detA = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot (-6) + (-3 - 5) = -12 - 8 = -20$.

- Μπορούμε να την υπολογίσουμε ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη, αρκεί να εφαρμόσουμε τον κανόνα της σκακιέρας για τα πρόσημα.

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Στην πράξη το ανάπτυγμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας είναι ως προς τη γραμμή ή τη στήλη που έχει τα <u>περισσότερα μηδενικά στοιχεία</u>.

- Π.χ. $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ανάπτυγμα ως προς την 3η γραμμή!

- Άρα $detB = |B| = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 1$

Ιδιότητες οριζουσών

- **1) Ανάστροφοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα.**

$$\boldsymbol{det(A^T) = detA}$$

- **2) Αν ο πίνακας Α έχει μία μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε $\boldsymbol{detA = 0}$**

- **3) Αν ο πίνακας Α έχει δύο ίσες γραμμές ή στήλες ή ανάλογες, τότε**

  $\boldsymbol{detA = 0}$

- **4) Αν ο πίνακας Α είναι άνω τριγωνικός ή κάτω τριγωνικός, τότε η**

  ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του.

Ιδιότητες οριζουσών (συνέχεια-στοιχειώδεις μετασχηματισμοί και ορίζουσες)

5) Η ορίζουσα του πίνακα δεν μεταβάλλεται αν σε μια γραμμή (ή στήλη) προσθέσω ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης $detB = detA$.

6) Η εναλλαγή δύο γραμμών (ή στηλών) επιφέρει αλλαγή στο πρόσημο της ορίζουσας $detB = -detA$.

7) Αν πολλαπλασιαστεί μία γραμμή με $k \neq 0$ τότε όλη ορίζουσα πολλαπλασιάζεται επί k, $detB = k \cdot detA$.

Ιδιότητες οριζουσών (συνέχεια)

- 7) Μία ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών αν κάθε στοιχείο μιας στήλης ή γραμμής είναι άθροισμα 2 προσθετέων.
- 8) $\boldsymbol{det(AB) = detA \cdot detB,}$
  $\text{ό}\boldsymbol{\pi ο υ\ A, B\ \tau ε \tau ρ α γ ω ν ι κ ο ι\ \pi ι ν α κ ε ς\ ι δ ι ω ν\ δ ι α σ \tau α σ ε ω ν}.$
- 9) Συνήθως: $\boldsymbol{det(A + B) \neq detA + detB}$

Παράδειγμα υπολογισμού ορίζουσας

1) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα:

- $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

- Θα μετατρέψουμε με κατάλληλους μετασχηματισμούς τον πίνακα σε τριγωνικό κ έτσι η ορίζουσά του θα υπολογιστεί εύκολα.

- Προσοχή!
- Αν κατά τη μετατροπή υπάρχει κάποια γραμμή του πίνακα που πολλαπλασιάζεται με έναν μη μηδενικό αριθμό λ τότε επειδή η ορίζουσα του πίνακα πολλαπλασιάζεται με αυτόν τον αριθμό λ θα πρέπει στο τέλος να διαιρέσουμε την τιμή της ορίζουσας που θα βρούμε με αυτόν τον αριθμό λ.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \dots \xrightarrow[\text{}]{\substack{\delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\gamma\iota\nu\varepsilon\ \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\alpha\sigma\mu o\varsigma \\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\omega\nu\ \mu\varepsilon\ \kappa\alpha\pi o\iota o\nu\ \alpha\rho\iota\theta\mu o}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα $\boldsymbol{det}\Gamma = \boldsymbol{det}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 6 \cdot (-1) = 18$

Παράδειγμα

- **Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα:** $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{c}^2 \end{bmatrix}$.

- **Λύση:**
- **Από τις ιδιότητες των οριζουσών έχουμε :**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

Αφαιρούμε από τη 2η γραμμή την 1η γραμμή
και από την 3η γραμμή την 1η γραμμή

ανάπτυγμα ως προς
τα στοιχεία της 1ης
γραμμής

$$1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) =$$

$$(b-a)(c-a)(c+a-b-a) = \boxed{(b-a)(c-a)(c+b)}$$