Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας 2018-2019

Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα

Παυλοπούλου Κάλλια

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Λύση:

- Εφόσον $A - \lambda I_2 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$
- Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

- Και η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Και οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές το πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$.

Λύση:

- Εφόσον $A - \lambda I_3 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$
- Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι
- $det(A - \lambda I_3) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$
- Και η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

Διαιρέτες του σταθερού όρου -4, άρα $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

- Παρατηρούμε ότι η λ=4 είναι μια ακέραια λύση. Άρα

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = (\lambda - 4)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 1\right)$$

- Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση

$$(\lambda - 4)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 1\right) = 0$$

- Και οι λύσεις: λ=4 ή λ=2+$\sqrt{3}$ ή λ=2-$\sqrt{3}$

- Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι

$$\boxed{\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}}$$

Άσκηση 3

- Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Λύση:

- 1) $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$
- 2) $\det(A - \lambda I_2) = X_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$
- 3) $\det(A - \lambda I_2) = X_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$ είναι οι ιδιοτιμές του A.

- **4A) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε:**
- $(A-\lambda_1 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 4 & 3-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1]{\gamma_1 \to \frac{1}{2}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$

y ελεύθερη μεταβλητή

x βασική μεταβλητή

- $(A-\lambda_1 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_1\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$
- $\begin{cases} x+y=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases}, y \in R \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ 0=0 \end{cases}, y \in R \Leftrightarrow x=-y,\ y \in R.$

Άρα ο ιδιοχώρος $V_{-1}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in R.$$

Και μια βάση B_{-1} του ιδιοχώρου $V_{-1}(A)$ είναι:

$$B_{-1} = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -1 είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $y \neq 0$.

- **4B) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ έχουμε:**
- $(A-\lambda_2 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_2 \to \gamma_2 + \gamma_1]{\gamma_1 \to \frac{1}{-4}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$

<u>y ελεύθερη μεταβλητή</u>

<u>x βασική μεταβλητή</u>

$$(A-\lambda_2 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_2\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{y}{2} = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}, y \in R$$

Άρα ο ιδιοχώρος $V_5(A)$ έχει διανύσματα της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{2} \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, y \in R.$$

Και μια βάση B_5 του ιδιοχώρου $V_5(A)$ είναι:

$$B_5 = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του Α που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 5 είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $y \neq 0$.

Άσκηση 4

- Δίνεται ο πίνακας $A \in R^{3\times3}$ με $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.
- A) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.
- B) Να υπολογίσετε άμεσα την ορίζουσα $detA$ με χρήση του $X_A(\lambda)$ που βρήκατε.

Λύση:

- A) χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και τις ιδιοτιμές του A ;
- $X_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 0-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$
- $(3-\lambda)\cdot[-\lambda(3-\lambda)-4] - 2[2(3-\lambda)-8] + 4(4+4\lambda) =$
- $(3-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda - 4\right) - 2(-2\lambda - 2) + 16(\lambda+1) =$
- $(3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-4) + 20(\lambda+1) =$
- $(\lambda+1)[(3-\lambda)(\lambda-4)+20] =$
- $(\lambda+1)\left(-\lambda^2 + 7\lambda + 8\right) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8).$

Δηλαδή:

- $\boxed{X_{\mathrm{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8\,.}$

- Για να βρούμε τις ιδιοτιμές θέτουμε:

$$X_{\mathrm{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1\ (\delta\iota\pi\lambda\eta) \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}$$

- Επομένως οι ιδιοτιμές του Α είναι οι εξής:

$$\boxed{\lambda_1 = -1\ (\delta\iota\pi\lambda\eta)\,\kappa\alpha\iota\ \lambda_2 = 8\,.}$$

1) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε :

$$(A - \lambda_1 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow [A - (-1)I_3]\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύση ομογενούς συστήματος

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \to \frac{1}{4}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$$

Γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος

y, z ελεύθερες μεταβλητές

x βασική μεταβλητή

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε λοιπόν:
- $(A - \lambda_1 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_1\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

- $\boxed{\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{cases}, y \in R, z \in R.}$

- Άρα ο ιδιοχώρος $V_{-1}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής:
- $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in R, z \in R.$

Και μια βάση B_{-1} του ιδιοχώρου $V_{-1}(A)$ είναι:

$$\boxed{B_{-1} = \left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.}$$

2) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ έχουμε :

$$(A-\lambda_2 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow [A-8\cdot I_3]\,\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύση ομογενούς συστήματος

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_2]{\gamma_1 \to -\frac{1}{5}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 2 & -8 & 2 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$$

Γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος

x, y βασικές μεταβλητές

z ελεύθερη μεταβλητή

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ έχουμε λοιπόν:

$$(A-\lambda_2 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U_2\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x = z \\ y = \frac{1}{2}z\,, z \in R. \\ z \end{cases}}$$

Άρα ο ιδιοχώρος $V_8(A)$ έχει διανύσματα της μορφής:

- $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R.$

Και μια βάση B_8 του ιδιοχώρου $V_8(A)$ είναι:

$$\boxed{B_8 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

Δ) Υπολογισμός $detA$

- $detA = X_A(0) = -0^3 + 6 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + 8 = 8.$

Άρα $\boxed{detA = 8.}$