Ασκήσεις Γραμμική Άλγεβρα 2018-19

Παυλοπούλου Κάλλια

Άσκηση 1

Να δειχτεί ότι αν ο πίνακας A είναι διαγώνιος

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a - b + 1 & -a - b - c + 2 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc & a + \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$ τότε ο

πίνακας A είναι ο

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$ δηλαδή ο μοναδιαίος 2x2.

Λύση

Αν ο A είναι διαγώνιος τότε πρέπει:

$$-a-b-c+2=0$$

$$\text{και } a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

Όμως από την ταυτότητα του Euler έχουμε:

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

- Άρα λαμβάνουμε:

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 + c^3 \ - 3abc = o} \leftrightarrow$$

$$(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = \mathbf{0}\ .$$

Άρα

$$2 \cdot \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = \mathbf{0} \leftrightarrow$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = \mathbf{0} \leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = b = c}\ .$$

Επομένως a=b=c=2/3. Και προκύπτει από πράξεις ότι

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2\ .$$

Άσκηση 2

Αν $A = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$

να υπολογίσετε τους πίνακες A^2, A^3, A^ρ.

Λύση

$$A^2 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (cos\theta)^2 - (sin\theta)^2 & -2sin\theta cos\theta \\ 2sin\theta cos\theta & (cos\theta)^2 - (sin\theta)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos2\theta & -sin2\theta \\ sin2\theta & cos2\theta \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos2\theta & -sin2\theta \\ sin2\theta & cos2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta \cdot cos2\theta - sin\theta \cdot sin2\theta & -sin\theta cos2\theta - cos\theta sin2\theta \\ sin\theta cos2\theta + cos\theta sin2\theta & (cos\theta)^2 - (sin\theta)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos3\theta & -sin3\theta \\ sin3\theta & cos3\theta \end{bmatrix}$$

Ομοίως

$$A^\rho = \begin{bmatrix} cos\rho\theta & -sin\rho\theta \\ sin\rho\theta & cos\rho\theta \end{bmatrix} .$$

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε τη n-οστή $(\mathbf{n} \geq \mathbf{1})$δύναμη του τετραγωνικού πίνακα A, όπου $A = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$και του $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I_2 \ \ (\text{ή } A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_2 \cdot I_2 = I_2)$$

Επομένως:

$$A^\nu = \begin{cases} I_2, & \text{αν } \nu = 2\rho, \rho \in \mathrm{N} \\ \mathrm{A}, & \text{αν } \nu = 2\rho + 1, \rho \in N \end{cases}$$

Απόδειξη επαγωγικά

Άσκηση 4

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix}$ $\kappa\alpha\iota$ $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$,

$\nu\alpha\ \pi\rho o\sigma\delta\iota o\rho\iota\sigma\tau o\acute{\upsilon}\nu\ \tau\alpha\ x, y, z\ \ \varepsilon\tau\sigma\iota\ \omega\sigma\tau\varepsilon\ \nu\alpha\ \iota\sigma\chi\upsilon\varepsilon\iota$:

$$\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 = (\mathrm{A} - \mathrm{B})(\mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

Λύση

- *Γενικά ισχύει η σχέση:*

$$(\mathbf{A}-\boldsymbol{B})(\mathbf{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2+\mathbf{AB}-\mathbf{BA}\,.$$

Η σχέση

$$\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2=(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$$

ισχύει αν και μόνο αν οι πίνακες Α, Β αντιμετατίθενται.

Σε αυτή την περίπτωση λαμβάνουμε:

$$AB = \begin{bmatrix} x & xy & 0 \\ xy & y & z \\ x & y & z^2 \end{bmatrix} \text{και } BA = \begin{bmatrix} x & x^2 & 0 \\ y^2 & y & y \\ z & z & z^2 \end{bmatrix}$$

Επομένως η δοσμένη σχέση αληθεύει αν και μόνο αν:

$$xy = x^2, xy = y^2, \mathrm{y} = \mathrm{x}, \mathrm{y} = \mathrm{z}.$$

Άρα τελικά

x=y=z.

Άσκηση 5

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in \Pi_{\nu}$.

Αν ικανοποιούν τις ιδιότητες:

$$B^2 = I_{\nu} \; \kappa\alpha\iota \; A = \frac{1}{2}(B + I_{\nu})$$

να δείξετε ότι

$$A^2 = A.$$

Λύση

$$A^2 = \mathrm{A} \cdot \mathrm{A} =$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{B} + I_\nu) \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{B} + I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}(\mathrm{B} + I_\nu)\,(\mathrm{B} + I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}(\mathrm{B} \cdot \mathrm{B} + I_\nu \cdot \mathrm{B} + \mathrm{B} \cdot I_\nu + I_\nu \cdot I_\nu) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(B^2 + \mathrm{B} + \mathrm{B} + I_\nu\right) =$$

$$\frac{1}{4}(I_\nu + 2 \cdot \mathrm{B} + I_\nu) =$$

$$\frac{1}{4}(2 \cdot \mathrm{B} + 2 \cdot I_\nu) =$$

$$\frac{2}{4}(\mathrm{B} + I_\nu) = \frac{1}{2}(\mathrm{B} + I_\nu) = A.$$

Άσκηση 6

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$.

Αν ισχύει ότι $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_\nu$,

τότε να δείξετε ότι οι πίνακες A, B αντιμετατίθενται.

Λύση

Αφού $A^2 = I_\nu$ αυτό σημαίνει ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ότι $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$. (*)

Ομοίως αφού $\mathrm{B}^2 = I_\nu$ αυτό σημαίνει ότι ο Β είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ότι $\mathrm{B}^{-1} = \mathrm{B}$. (**)

Ομοίως αφού $(AB)^2 = I_\nu$, *αυτο σημαινει οτι* $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{AB}$.

Αλλά $(AB)^{-1} = \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$, (λόγω των σχέσεων (*) και (**)).

Επομένως:

$$\boxed{AB = BA\,!}$$

Άσκηση 7

Δίνεται τετραγωνικός πίνακας $A \in \Pi_n$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος και τέτοιος ώστε:

$$A^{-1} = I_n - A$$

Να δείξετε ότι:

$$A^6 - I_n = O_n \,.$$

Λύση

Αφού A αντιστρέψιμος, προκύπτει ότι: $A \cdot A^{-1} = I_n$.

Επομένως:

$$I_n = A \cdot (I_n - A) = A \cdot I_n - A \cdot A$$

Άρα:

$$I_n = A - A^2$$

$$A - A^2 - I_n = O_n \quad (1)$$

$$A^2 - A + I_n = O_n$$

$$A \cdot \left(A^2 - A + I_n\right) = A \cdot O_n$$

$$A^3 - A^2 + A = O_n \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$A^3 + I_n = O_n \to A^3 = -I_n\ .$$

Άρα

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = (-I_n) \cdot (-I_n) =$$
$$(-1) \cdot (-1) \cdot (I_n)^2 = 1 \cdot I_n = I_n.$$

Επομένως:

$$\boxed{A^6 - I_n = O_n}$$

Άσκηση 8

1) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Αν ναι, να βρείτε τον αντίστροφό του με τη χρήση γραμμοπράξεων.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Με βάση τον υπολογισμούς στο (1), και χωρίς να την υπολογίσετε, ποια είναι η ορίζουσα *detA* του A;

3) Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \end{array}\right\}$$

Λύση

1) Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο εύρεσης αντιστρόφου:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{\xrightarrow{\gamma_1 \to -\gamma_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{\xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{5}\gamma_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3/5 & -1/5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_3 \to \frac{1}{2}\gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - \gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & \boxed{-2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 + 2\gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{-3} & 0 & -4/10 & -2/10 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 + 3\gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/10 & 7/10 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array}\right)$$

Μοναδιαίος

Αντίστροφος A^{-1}

<u>2) Με βάση τον υπολογισμούς στο (1), και χωρίς να την υπολογίσετε, ποια είναι η ορίζουσα *detA* του Α;</u>

- Πρέπει να δούμε:

α) ποιες από τις γραμμοπράξεις επηρεάζουν τον υπολογισμό της ορίζουσας

β) πώς επηρεάζουν τον υπολογισμό της;

- *Πάμε λοιπόν, να ανατρέξουμε στις ιδιότητες των οριζουσών:*

- ***<u>Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής με τον αριθμό λ,</u>***

<u>τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ.</u>

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda \cdot \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \lambda \cdot \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \lambda \cdot \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \quad -\lambda \cdot \beta_1 \cdot \mathrm{B}_1 + \lambda \cdot \beta_2 \cdot \mathrm{B}_2 - \lambda \cdot \beta_3 \cdot \mathrm{B}_3 =$$

$$= \lambda \cdot (-\beta_1 \cdot \mathrm{B}_1 + \beta_2 \cdot \mathrm{B}_2 - \beta_3 \cdot \mathrm{B}_3) = \lambda \cdot D$$

- ***<u>Αν στα στοιχεία μιας γραμμής προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής πολλαπλασιασμένα επί λ,</u>***

  <u>τότε η ορίζουσα δε μεταβάλλεται.</u>

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 + \lambda \cdot a_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 + \lambda \cdot a_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 + \lambda \cdot a_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \lambda \cdot a_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \lambda \cdot a_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \lambda \cdot a_3 \end{vmatrix}}_{\textit{Δύο στήλες ανάλογες}} = \quad \boldsymbol{D + 0 = D}$$

Γραμμοπράξεις-υπολογισμός ορίζουσας

- Παρατηρώντας τις γραμμοπράξεις που κάναμε, εκείνες που επηρεάζουν τον υπολογισμό της ορίζουσας είναι οι εξής:

- 1) $\gamma_1 \to -\gamma_1$

Εδώ πολλαπλασιάζεται η ορίζουσα που μένει με -1

- 2) $\gamma_2 \to \frac{1}{5}\gamma_2$

Εδώ πολλαπλασιάζεται η ορίζουσα που μένει με 5

- 3) $\gamma_3 \to \frac{1}{2}\gamma_3$

Εδώ πολλαπλασιάζεται η ορίζουσα που μένει με 2

Πιο συγκεκριμένα

- Π.χ.

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{5}\gamma_2} \mathbf{A}_1$$

$$detA_1 = \frac{1}{5}\, detA \Leftrightarrow detA = 5 \cdot detA_1$$

Επομένως:

- $\boldsymbol{detA = (-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot detA_{\alpha\nu\eta\gamma\mu\varepsilon\nu o\varsigma\ \kappa\lambda\iota\mu\alpha\kappa\omega\tau o\varsigma} =}$

$$\boldsymbol{(-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot detI_3 =}$$

$$\boldsymbol{(-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 = -10}$$

3) Να λυθεί το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \end{array}\right\}$

- Ο πίνακας του συστήματος είναι ο αντιστρέψιμος πίνακας A.
- Άρα το σύστημα γράφεται:
- $\mathrm{A} \cdot X = B$, $ό\pi ου$ $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ και $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.
- Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος,

$$\mathrm{A} \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \ldots\ldots$$

Με πολλαπλασιασμό πινάκων:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/5 \\ -14/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}.$$

Σημείωση: θα μπορούσαμε να το λύσουμε με τη μέθοδο του επαυξημένου πίνακα μετατρέποντάς τον σε ανηγμένο κλιμακωτό.

Άσκηση 9

1) Αν a, b, c, x πραγματικοί αριθμοί, να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{bmatrix}$$

2) Στη συνέχεια, για $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \geq \mathbf{0}$, να λυθεί ως προς x η εξίσωση:

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{0}$$

Λύση:

- $|A| = \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = (\Sigma 1 \to \Sigma 1 - \Sigma 2 \; \kappa\alpha\iota \; \Sigma 2 \to \Sigma 2 - \Sigma 3) =$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & x \\ -b & b & x \\ 0 & -c & c+x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & x \\ -b & b & x \\ 0 & -c & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & b & 0 \\ 0 & -c & c \end{vmatrix} =$$

τριγωνικος πινακας

Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου

$$x\cdot\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ -b & b & 1 \\ 0 & -c & 1 \end{vmatrix} + abc = (\Gamma 2 \to \Gamma 2 - \Gamma 1 \text{ και } \Gamma 3 \to \Gamma 3 - \Gamma 1) =$$

$$x\cdot\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ -b-a & b & 0 \\ -a & -c & 0 \end{vmatrix} + abc =$$

$$(\alpha\nu\alpha\pi\tau\upsilon\gamma\mu\alpha\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \tau\alpha\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha\ \tau\eta\varsigma\ \tau\rho\iota\tau\eta\varsigma\ \sigma\tau\eta\lambda\eta\varsigma) =$$

$$x\cdot\begin{vmatrix} -b-a & b \\ -a & -c \end{vmatrix} + abc =$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} -b-a & b \\ -a & -c \end{vmatrix} + abc =$$

$$x \cdot [(-b-a) \cdot (-c) - (-a) \cdot b] + abc =$$

$$= x \cdot (bc + ac + ba) + abc$$

Επομένως:

$$\boxed{|\mathrm{A}| = abc + \ x \cdot (ab + ac + bc)}$$

Για ποιες τιμές του x έχουμε detA=0;

- **Αν όλοι οι αριθμοί a, b, c είναι μη μηδενικοί** τότε προφανώς $ab + ac + bc > 0$ και η εξίσωση $|A| = 0$,
- έχει μοναδική λύση την

- $|\mathrm{A}| = 0 \Leftrightarrow abc + x \cdot (ab + ac + bc) = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{x = \frac{-abc}{ab + ac + bc}}$$

- Αν ακριβώς μόνο ένα από τα a, b, c είναι ίσο με μηδέν, τότε η εξίσωση

$$|A| = 0 \Leftrightarrow abc + x \cdot (ab + ac + bc) = 0$$

  - Έχει μοναδική λύση την $\boxed{x=0.}$

- Πράγματι, έστω a=0 και b, c>0. Τότε:

$$0 + x \cdot (0 + 0 + bc) = 0 \Leftrightarrow x \cdot bc = 0 \xLeftrightarrow{b>0, c>0} x = 0$$

- Αν δύο από τους αριθμούς a, b, c είναι ίσοι με μηδέν, τότε η εξίσωση δέχεται κάθε πραγματικό αριθμό x ως λύση.

  - Πράγματι, αυτό προκύπτει επειδή έχουμε

  (έστω a=o και b=o)

$$abc = 0 \; και \;\; ab + ac + bc = 0$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow abc + \; x \cdot (ab + ac + bc) = 0 \Leftrightarrow \; 0 + \mathrm{x} \cdot 0 = 0$$

$$\boxed{Άρα \; εχουμε \; \mathrm{x} \cdot 0 = 0}$$