Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών

ΣΗΜΜΥ – ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

1η ενότητα:

Αυτόματα, τυπικές γλώσσες, γραμματικές

Επιμέλεια διαφανειών: Στάθης Ζάχος, Άρης Παγουρτζής

Μηχανές πεπερασμένων καταστάσεων (FSM)

- Τρόπος κωδικοποίησης αλγορίθμων.
- Τρόπος περιγραφής συστημάτων πεπερασμένων καταστάσεων:
  - Μοντελοποιούν μια θεμελιώδη (φαινομενική) αντίφαση των υπολογιστικών (και άλλων) συστημάτων: πεπερασμένο μέγεθος συστήματος, απεριόριστο μέγεθος εισόδου.
  - Ορίζονται με εσωτερικές καταστάσεις και προκαθορισμένο τρόπο μετάβασης από μία κατάσταση σε άλλη με βάση την τρέχουσα κατάσταση και την είσοδο. Μπορεί να έχουν και έξοδο.
- Εφαρμογές σε πλήθος επιστημονικών πεδίων.

Παράδειγμα: μηχανή καφέ (i)

Προδιαγραφές

- Δύο είδη καφέ: ελληνικός ή φρέντο.
- Κόστος καφέ: 40 λεπτά.
- Επιτρέπονται κέρματα 10, 20, ή 50 λεπτών.

Σχεδίαση

- Πόσες καταστάσεις χρειαζόμαστε;

Παράδειγμα: μηχανή καφέ (ii)

Σχεδίαση του συστήματος

- Εσωτερικές καταστάσεις: q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5
  - q_i : έχουν δοθεί μέχρι στιγμής 10*i λεπτά
- Δυνατές είσοδοι (ενέργειες): P1, P2, P5, K1, K2
  - P1, P2, P5 : εισαγωγή κέρματος 10, 20, ή 50 λεπτών
  - K1, K2 : κουμπί 1 για ελληνικό καφέ, 2 για φρέντο
- Δυνατές έξοδοι: E1, E2, E3, E4, E5, ΕΛ, ΦΡ
  - E_i : επιστροφή 10*i λεπτών
  - ΕΛ : παροχή ελληνικού καφέ
  - ΦΡ : παροχή φρέντο

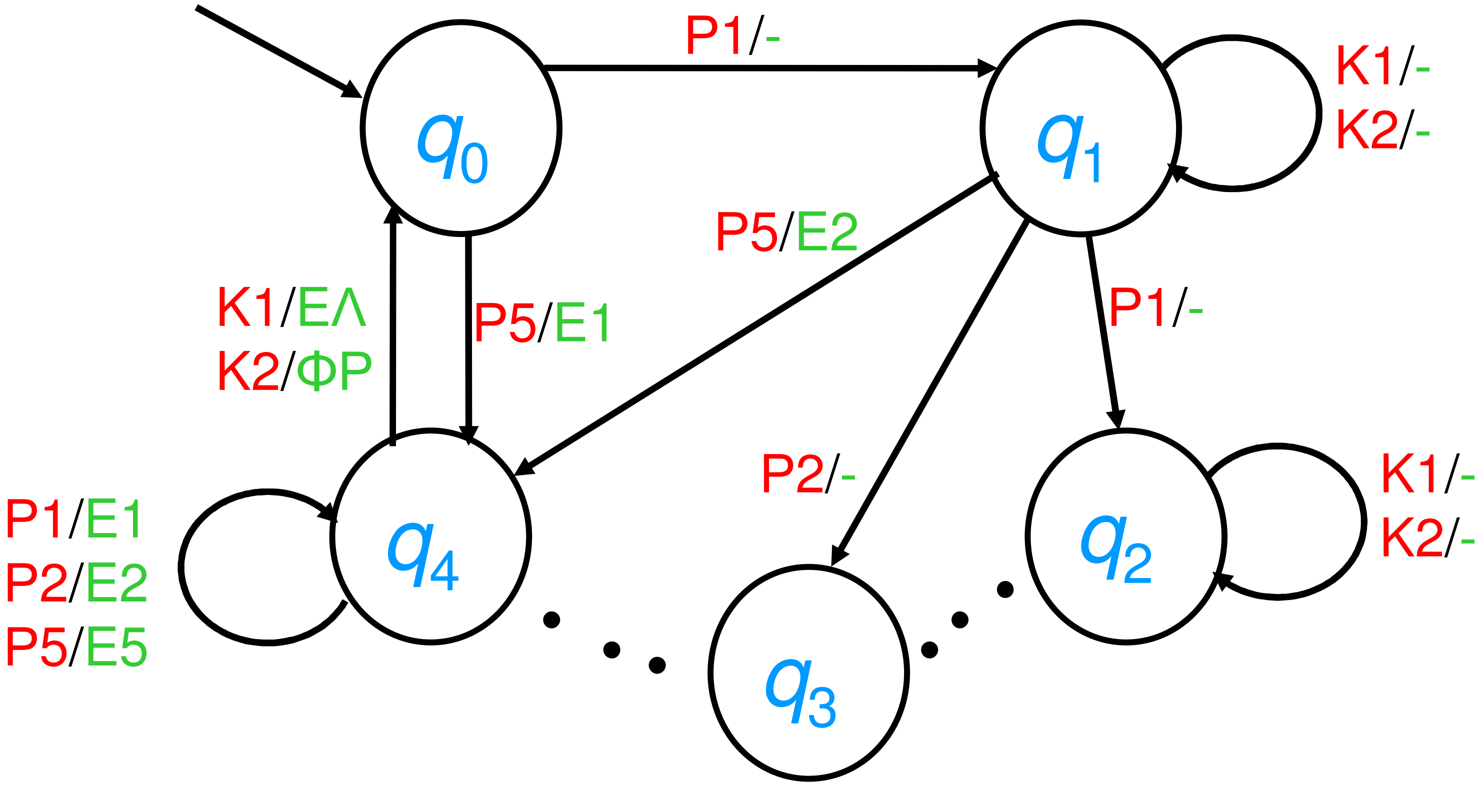
Παράδειγμα: μηχανή καφέ (iii)

- Πίνακας καταστάσεων: δείχνει ποια είναι η επόμενη κατάσταση και η έξοδος για κάθε συνδυασμό τρέχουσας κατάστασης και εισόδου. Αρχική κατάσταση: q_0.

Είσοδος / Κατάστ.	P1	P2	P5	K1	K2
q_0	q_1, -	q_2, -	q_4, E1	q_0, -	q_0, -
q_1	q_2, -	q_3, -	q_4, E2	q_1, -	q_1, -
q_2	q_3, -	q_4, -	q_4, E3	q_2, -	q_2, -
q_3	q_4, -	q_4, E1	q_4, E4	q_3, -	q_3, -
q_4	q_4, E1	q_4, E2	q_4, E5	q_0, ΕΛ	q_0, ΦΡ

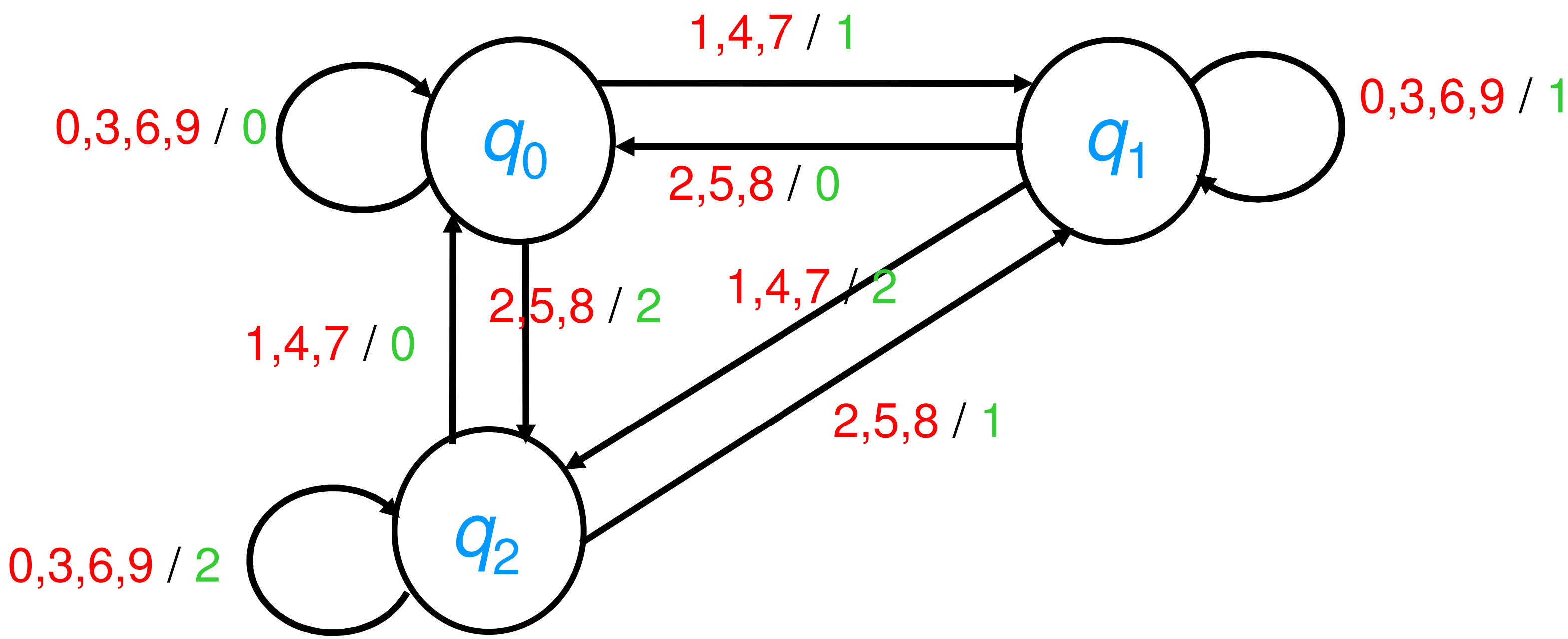
Παράδειγμα: μηχανή καφέ (iv)

- Διάγραμμα καταστάσεων: παρέχει τις ίδιες πληροφορίες με τον πίνακα καταστάσεων με πιο εποπτικό τρόπο. Αρχική κατάσταση: q_0 (σημειώνεται με βέλος).



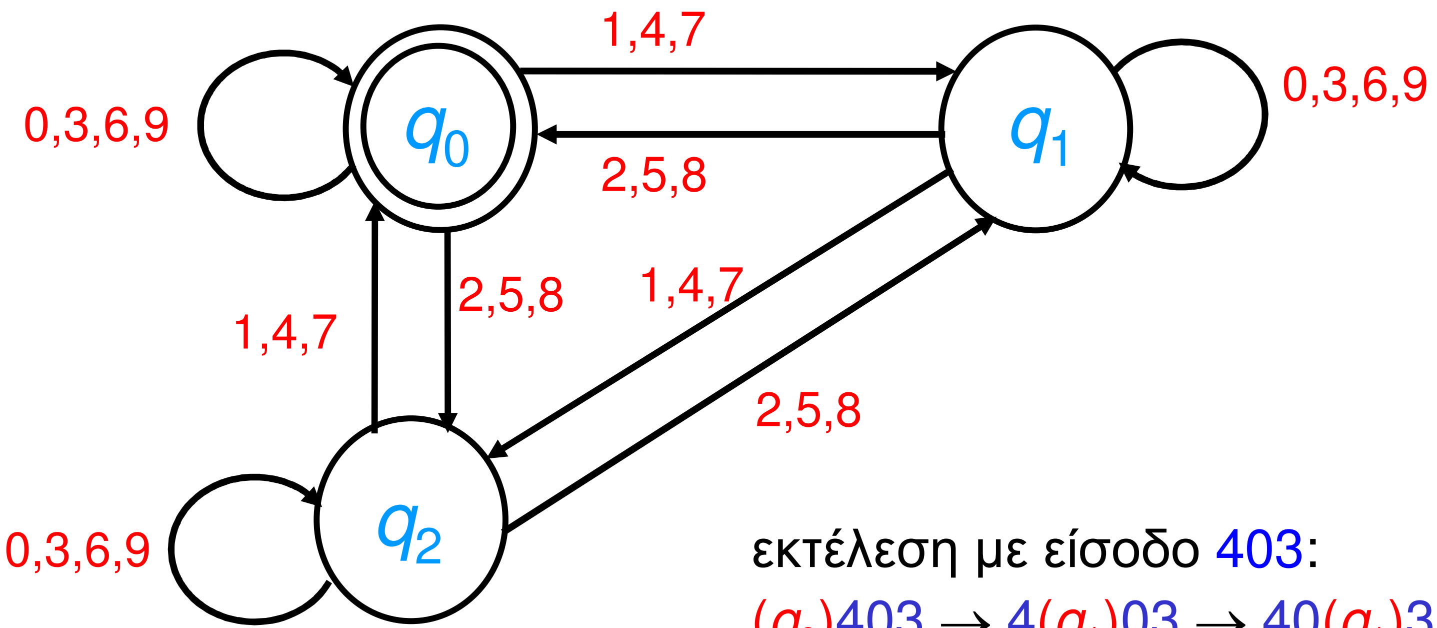
Παράδειγμα ΙΙ: αριθμητική modulo

- Κατασκευή μηχανής που να κάνει την πράξη n mod 3
- Πόσες καταστάσεις χρειαζόμαστε;
- Χρήση ιδιότητας: $n \bmod 3 = (n_1 + \ldots + n_k) \bmod 3$, n_i τα (δεκαδικά) ψηφία του n *Αποδείξτε το!*



Παράδειγμα ΙΙ: αριθμητική modulo

- Απλοποίηση: αν ενδιαφέρει μόνο η διαιρετότητα με το 3 δεν χρειάζεται έξοδος
- Ορίζουμε καταστάσεις αποδοχής (διπλός κύκλος)



εκτέλεση με είσοδο 403:

$(q_0)403 \rightarrow 4(q_1)03 \rightarrow 40(q_1)3 \rightarrow 403(q_1)$

ΑΠΟΡΡΙΨΗ

Αριθμητική modulo: ασκήσεις

- Άσκηση 1: φτιάξτε μηχανή ελέγχου διαιρετότητας με το 5

- Άσκηση 2: φτιάξτε μηχανή ελέγχου διαιρετότητας με το 7

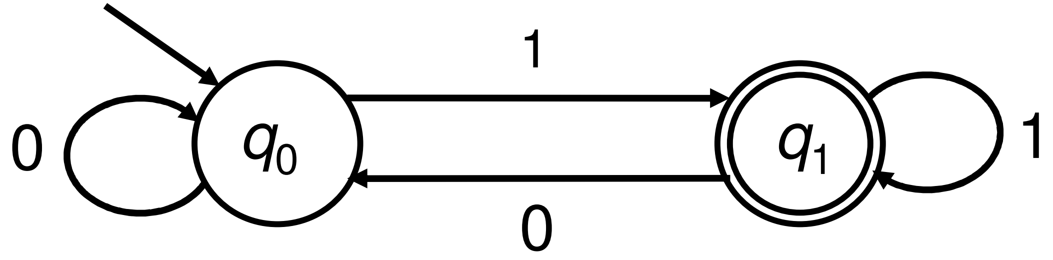
Αυτόματα

- Μηχανές πεπερασμένων καταστάσεων χωρίς έξοδο: κάποιες καταστάσεις αποδέχονται, ενώ οι υπόλοιπες απορρίπτουν. Καταστάσεις αποδοχής συμβολίζονται με επιπλέον κύκλο.
- Ένα αυτόματο έχει κάποιες εσωτερικές καταστάσεις q_0, q_1, q_7, q_{15}, ... , και μια συνάρτηση μετάβασης δ που καθορίζει την επόμενη κατάσταση του αυτομάτου με βάση την τρέχουσα κατάσταση και την συμβολοσειρά εισόδου. Αποδέχεται ή απορρίπτει τη συμβολοσειρά εισόδου.
- Αναγνωριστές γλωσσών (δηλαδή επιλύουν προβλήματα απόφασης, κατάλληλα *κωδικοποιημένα)*.

Αυτόματα και τυπικές γλώσσες

- Τυπικές γλώσσες: χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση υπολογιστικών προβλημάτων αλλά και τον ορισμό γλωσσών προγραμματισμού.
  Π.χ. $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ δυαδική γραφή πρώτου αριθμού$\}$
- Αυτόματα: χρησιμεύουν για την αναγνώριση τυπικών γλωσσών και για την κατάταξη της δυσκολίας των αντίστοιχων προβλημάτων:
  - Κάθε αυτόματο αναγνωρίζει μια τυπική γλώσσα: *το σύνολο των συμβολοσειρών που το οδηγούν σε κατάσταση αποδοχής*.

Παράδειγμα: αναγνώριση περιττών



- q_0: τελευταίο ψηφίο διάφορο του 1
- q_1: τελευταίο ψηφίο ίσο με 1
- η q_0 λέγεται αρχική κατάσταση ενώ η q_1 λέγεται κατάσταση αποδοχής (ή και *τελική*)
- εκτέλεση με είσοδο 0110:
  $(q_0)0110 \rightarrow 0(q_0)110 \rightarrow 01(q_1)10 \rightarrow 011(q_1)0 \rightarrow 0110(q_0)$ ΑΠΟΡΡΙΨΗ
- εκτέλεση με είσοδο 101:
  $(q_0)101 \rightarrow 1(q_1)01 \rightarrow 10(q_0)1 \rightarrow 101(q_1)$ ΑΠΟΔΟΧΗ

Άλλα αυτόματα

- Μηχανισμοί: χωρίς είσοδο – έξοδο: $\delta(q_i) = q_j$
  εκτέλεση: q_0 -> q_j -> q_k -> q_m . . .
- Αυτόματα στοίβας (PDA, pushdown automata): έχουν πολύ περισσότερες δυνατότητες καθώς μπορούν να χρησιμοποιήσουν μνήμη (σε μορφή στοίβας).
- Μηχανές Turing (TM): έχουν ακόμη περισσότερες δυνατότητες καθώς έχουν απεριόριστη μνήμη (σε μορφή ταινίας, με δυνατότητα επιστροφής).
- Γραμμικά περιορισμένα αυτόματα (LBA): είναι TM με μνήμη γραμμικά περιορισμένη (ως προς το μήκος της εισόδου).

Άλλες τυπικές γλώσσες

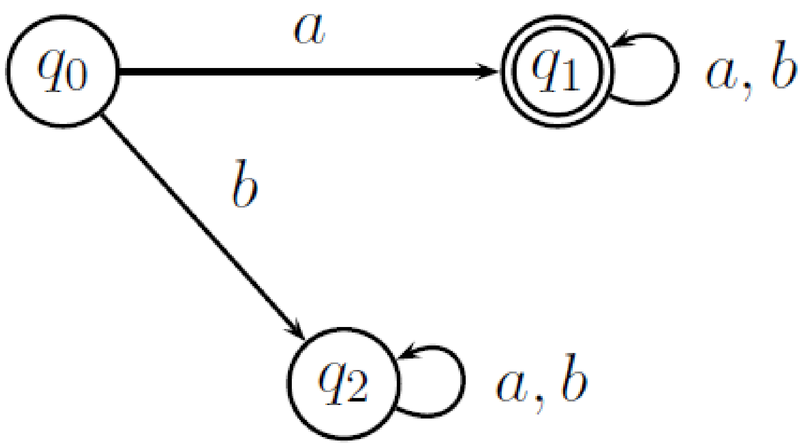
$$L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ αρχίζει με } 'a'\}$$

$$L_2 := \{w \in \{1, 3\}^* \mid w \text{ περιέχει άρτιο πλήθος } '1'\}$$

$$L_3 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ είναι παλινδρομική } \}$$

Παράδειγμα: DFA για L_1

$L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ αρχίζει με } 'a'\}$



	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
q_2	q_2	q_2

εκτέλεση με είσοδο *abba* :

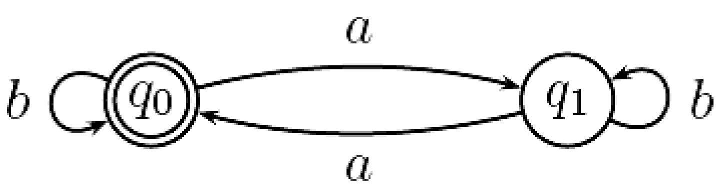
$(q_0)abba \rightarrow a(q_1)bba \rightarrow ab(q_1)ba \rightarrow abb(q_1)a \rightarrow abba(q_1)$

Τυπικός ορισμός DFA

- Ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (Deterministic Finite Automaton, DFA): πεντάδα $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$
  - Q : το σύνολο των καταστάσεων του M (πεπερασμένο),
    π.χ. $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
  - Σ : πεπερασμένο αλφάβητο εισόδου ($\Sigma \cap Q = \varnothing$),
    π.χ. $\Sigma = \{a,b\}$
  - $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$: συνάρτηση μετάβασης, π.χ. $\delta(q_0,a) = q_1$
  - $q_0 \in Q$: αρχική κατάσταση
  - $F \subseteq Q$: σύνολο τελικών καταστάσεων (αποδοχής),
    π.χ. $F = \{q_1\}$

Γλώσσα με DFA και γλώσσα χωρίς DFA

$$L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ περιέχει άρτιο πλήθος } 'a'\}$$



	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_0	q_1

$$L_3 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ είναι παλινδρομική } \}$$

Αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει DFA που να αναγνωρίζει την L_3 !
(χρειάζεται μνήμη με μέγεθος που εξαρτάται από την είσοδο)

Αποδοχή DFA: τυπικοί ορισμοί

- Επέκταση συνάρτησης δ: $Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$
  Η επεκτεταμένη δ δέχεται ως ορίσματα μια κατάσταση q και μια συμβολοσειρά u και δίνει την κατάσταση όπου θα βρεθεί το αυτόματο αν ξεκινήσει από την q και διαβάσει την u.

- Ορισμός επεκτεταμένης δ (σχήμα *πρωταρχικής αναδρομής*):

$$\begin{cases} \delta(q, \varepsilon) = q \\ \delta(q, wa) = \delta(\delta(q, w), a) \end{cases}$$

  όπου w είναι συμβολοσειρά οποιουδήποτε μήκους, ενώ a απλό σύμβολο του αλφαβήτου

Αποδοχή DFA: τυπικοί ορισμοί

- Ένα DFA αποδέχεται μία συμβολοσειρά u ανν $\delta(q_0,u) \in F$
- Ένα DFA M αποδέχεται τη γλώσσα

$$L(M) = \{w \mid \delta(q_0,w) \in F\}$$

- Οι γλώσσες που γίνονται αποδεκτές από DFA λέγονται κανονικές

Μη ντετερμινιστικά αυτόματα

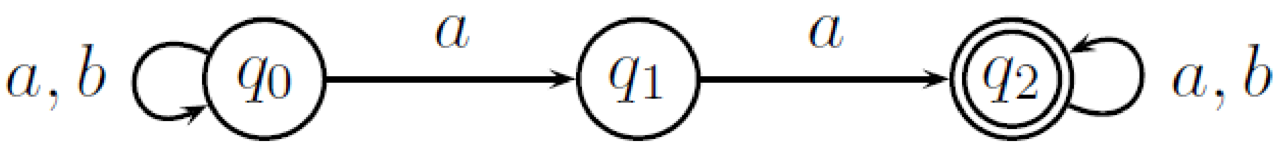
- Ντετερμινιστικά αυτόματα: για κάθε συνδυασμό κατάστασης / συμβόλου εισόδου υπάρχει μοναδική επόμενη κατάσταση
- Μη-ντετερμινιστικά αυτόματα:
  - για κάθε συνδυασμό κατάστασης / συμβόλου εισόδου υπάρχει *επιλογή* από σύνολο δυνατών επόμενων καταστάσεων
  - αποδοχή αν *κάποια* σειρά επιλογών οδηγεί σε αποδοχή

Μη ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα

- NFA (Non-deterministic Finite Automaton): για κάθε κατάσταση και σύμβολο εισόδου επιλέγεται μία από ένα σύνολο δυνατών επόμενων κατάστασεων.
- NFAε (NFA με ε-κινήσεις): μπορεί να αλλάζει κατάσταση χωρίς ανάγνωση επόμενου συμβόλου.

Παράδειγμα NFA

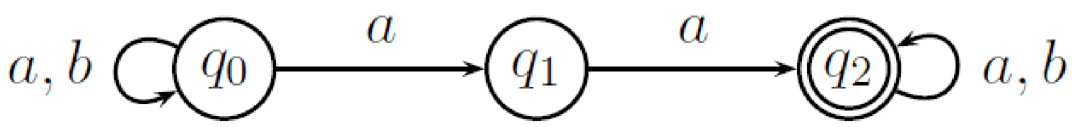
$$L_4 := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ περιέχει δύο συνεχόμενα } a\}$$



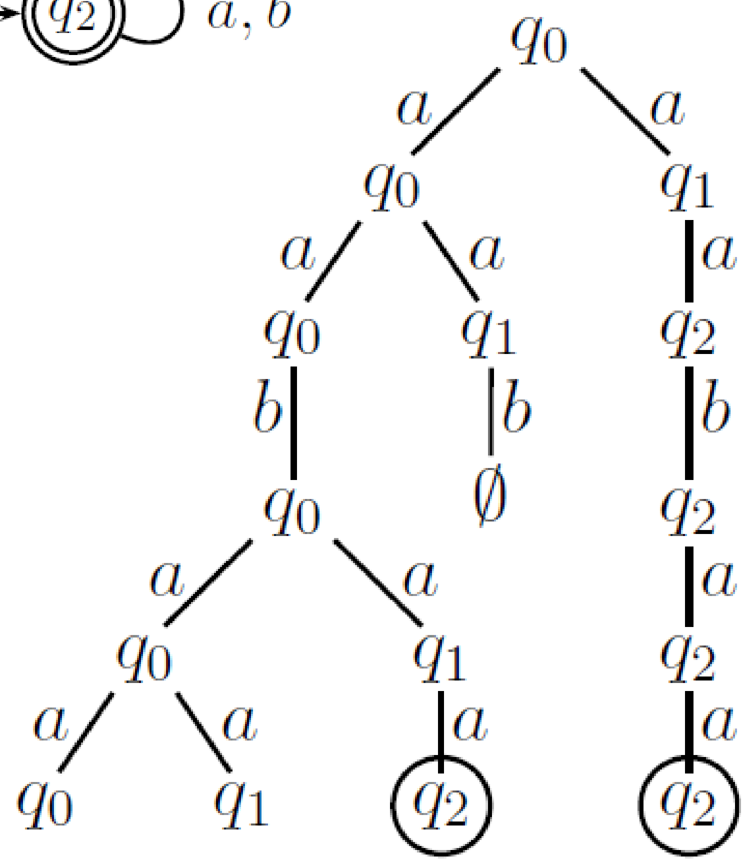
	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

Στη συνάρτηση μετάβασης, κενό σύνολο σημαίνει ότι η τρέχουσα εκτέλεση απορρίπτει (*προσοχή*: *μπορεί κάποια άλλη να αποδέχεται*).

Παράδειγμα NFA



Δένδρο υπολογισμού
για είσοδο *aabaa*



Τυπικός ορισμός NFA

πεντάδα $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$

- Q : το σύνολο των καταστάσεων του M (πεπερασμένο)
- Σ : πεπερασμένο αλφάβητο εισόδου ($\Sigma \cap Q = \varnothing$)
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathrm{Pow}(Q)$: συνάρτηση μετάβασης,
  π.χ. $\delta(q_i, a) = \{ q_j , q_k , q_m \}$
- $q_0 \in Q$: αρχική κατάσταση
- $F \subseteq Q$: σύνολο τελικών καταστάσεων (αποδοχής)

Υπενθύμιση: στη συνάρτηση μετάβασης, κενό σύνολο σημαίνει ότι η συγκεκριμένη εκτέλεση απορρίπτει (*προσοχή*: *μπορεί κάποια άλλη να αποδέχεται*).

Αποδοχή NFA: τυπικοί ορισμοί

- Ένα NFA αποδέχεται συμβολοσειρά w αν $\delta(q_0,w) \cap F \neq \varnothing$
- Ένα NFA M αποδέχεται τη γλώσσα

$$L(M) = \{w \mid \delta(q_0,w) \cap F \neq \varnothing\}$$

- *Σημείωση*: η συνάρτηση δ είναι επεκτεταμένη ώστε να δέχεται σαν ορίσματα μια κατάσταση q και μια συμβολοσειρά w και να δίνει το σύνολο των καταστάσεων όπου μπορεί να βρεθεί το αυτόματο αν ξεκινήσει από την q και διαβάσει την w
- *Παράδειγμα:* $\delta(q_0, aa) = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\delta(q_0, ba) = \{q_0, q_1\}$

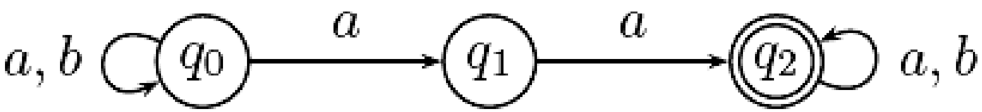
Ισοδυναμία NFA και DFA

- Θεώρημα Rabin-Scott: για κάθε NFA υπάρχει ένα DFA που αποδέχεται την ίδια γλώσσα.
- Επομένως τα DFA και τα NFA αναγνωρίζουν ακριβώς την ίδια κλάση γλωσσών: τις κανονικές γλώσσες (regular languages).
- Οι κανονικές γλώσσες αντιστοιχούν σε κανονικές παραστάσεις (regular expressions):

  π.χ. $(a+b)^*bbab(a+b)^*$

NFA ➔ DFA (i)

NFA για τη γλώσσα L_4 ("2 συνεχόμενα *a*")



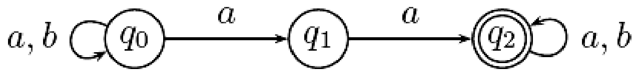
	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

Κατασκευάζουμε το *δυναμοσύνολο* των καταστάσεων. Αρχική κατάσταση: $\{q_0\}$. Τελικές: όσες περιέχουν τελική.

Υπόδειξη: εξετάζουμε μόνο *προσβάσιμα* από $\{q_0\}$ σύνολα καταστάσεων.

NFA → DFA (ii)

NFA για τη γλώσσα L_4



	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

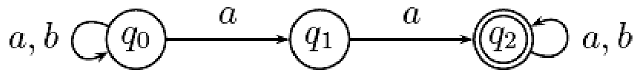
DFA για τη γλώσσα L_4

$Q'\setminus\Sigma$	a	b
$\surd$ $\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

Υπόδειξη: εξετάζουμε μόνο *προσβάσιμα* από $\{q_0\}$ σύνολα καταστάσεων.

NFA → DFA (iii)

NFA για τη γλώσσα L_4



	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

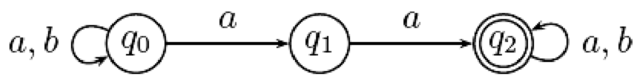
DFA για τη γλώσσα L_4

$Q' \backslash \Sigma$	a	b
$\surd$ $\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\surd$ $\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$

Υπόδειξη: εξετάζουμε μόνο *προσβάσιμα* από $\{q_0\}$ σύνολα καταστάσεων.

NFA ➔ DFA (iv)

NFA για τη γλώσσα L_4



	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

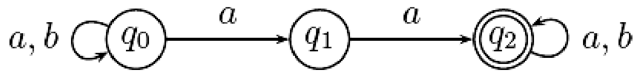
DFA για τη γλώσσα L_4

$Q' \backslash \Sigma$	a	b
√ $\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
√ $\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
√ $\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$

Υπόδειξη: εξετάζουμε μόνο *προσβάσιμα* από $\{q_0\}$ σύνολα καταστάσεων.

NFA → DFA (v)

NFA για τη γλώσσα L_4



	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

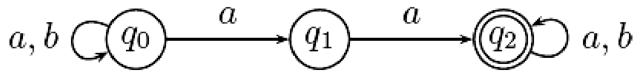
DFA για τη γλώσσα L_4

$Q' \backslash \Sigma$	a	b
√ $\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
√ $\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
√ $\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$
√ $\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$

Υπόδειξη: εξετάζουμε μόνο *προσβάσιμα* από $\{q_0\}$ σύνολα καταστάσεων.

NFA ➔ DFA (vi)

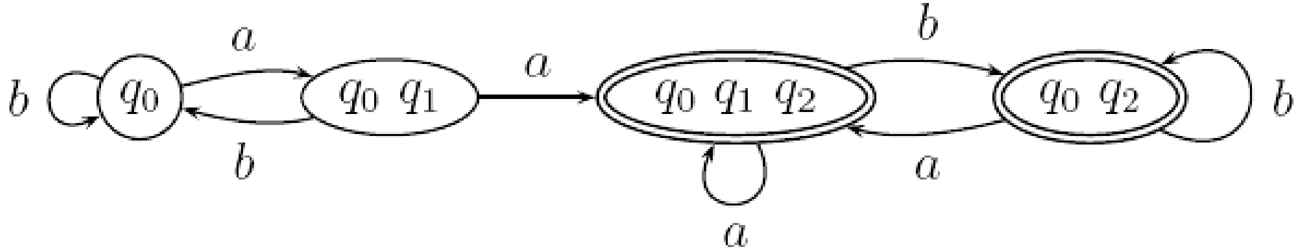
NFA για τη γλώσσα L_4



	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

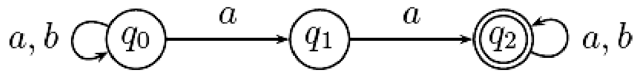
DFA για τη γλώσσα L_4

$Q' \backslash \Sigma$	a	b
√ $\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
√ $\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
√ $\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$
√ $\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$



NFA ➔ DFA (vii)

NFA για τη γλώσσα L_4

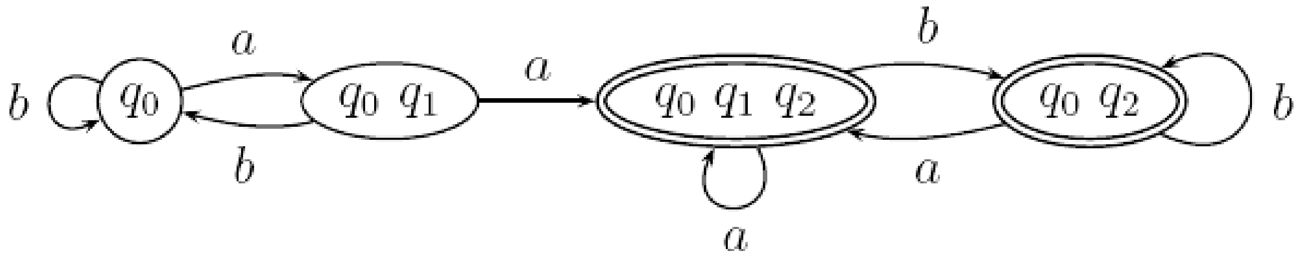


	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

DFA για τη γλώσσα L_4

$Q' \setminus \Sigma$	a	b
~~$\emptyset$~~	~~$\emptyset$~~	~~$\emptyset$~~
√ $\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
~~$\{q_1\}$~~	~~$\{q_2\}$~~	~~$\emptyset$~~
~~$\{q_2\}$~~	~~$\{q_2\}$~~	~~$\{q_2\}$~~
√ $\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
√ $\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$
~~$\{q_1, q_2\}$~~	~~$\{q_2\}$~~	~~$\{q_2\}$~~
√ $\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$

Οι μη προσβάσιμες καταστάσεις δεν παίζουν ρόλο!



NFA ➔ DFA: η μέθοδος τυπικά

Έστω το NFA $M = (Q,\Sigma,q_0,F,\delta)$.

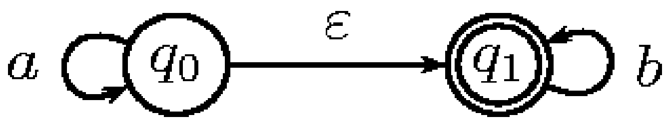
Ένα ισοδύναμο DFA $M' = (Q',\Sigma,q'_0,F',\delta')$, ορίζεται ως εξής:

- $Q' = \mathrm{Pow}(Q)$, δηλαδή οι καταστάσεις του M' είναι όλα τα υποσύνολα καταστάσεων του M.
- $q'_0 = \{q_0\}$,
- $F' = \{R \in Q' \mid R \cap F \neq \emptyset\}$, δηλαδή μια κατάσταση του M' είναι τελική αν περιέχει μια τελική κατάσταση του M.
- $\delta'(R, a) = \{q \in Q \mid q \in \delta(r, a)$ για $r \in R\}$, είναι δηλαδή το σύνολο των καταστάσεων όπου μπορεί να βρεθεί το M ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση του συνόλου R και διαβάζοντας το σύμβολο a (a-κίνηση).

Αυτόματα με ε-κινήσεις: NFA_ε

- Επιτρέπουν μεταβάσεις χωρίς να διαβάζεται σύμβολο (ισοδύναμα: με είσοδο το κενό string ε).
- Αποδέχονται τις συμβολοσειρές που μπορούν να οδηγήσουν σε τελική κατάσταση, χρησιμοποιώντας ενδεχομένως και ε-κινήσεις.

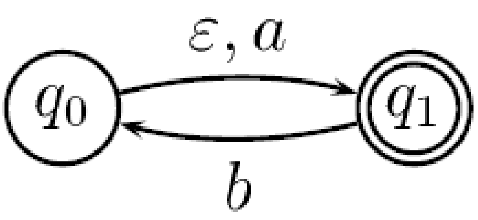
Παράδειγμα: NFA_ε για $L_5 := \{a^*b^*\} = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$



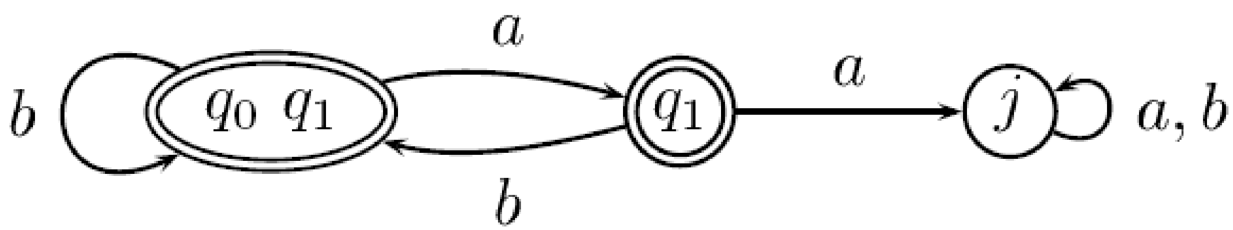
	a	b	ε
q_0	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$

Ισοδυναμία NFA$_\varepsilon$ με DFA: παράδειγμα

NFA$_\varepsilon$ για $\overline{L_4}$ (δηλαδή "όχι δύο συνεχόμενα a"):



DFA για $\overline{L_4}$:



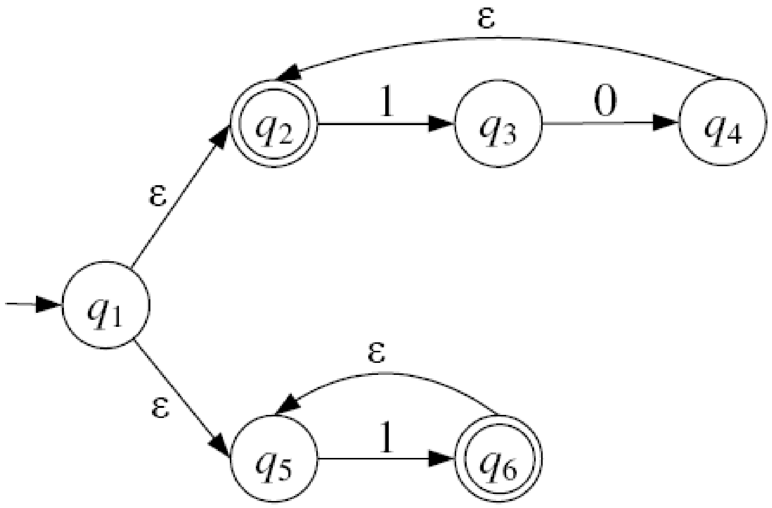
NFA_ε ➔ DFA: η μέθοδος τυπικά

Έστω το NFA_ε $M = (Q,\Sigma,q_0,F,\delta)$.

Ένα ισοδύναμο DFA $M' = (Q',\Sigma,q'_0,F',\delta')$, ορίζεται ως εξής:

- $Q' = \mathrm{Pow}(Q)$, δηλαδή οι καταστάσεις του *M'* είναι όλα τα υποσύνολα καταστάσεων του *M*.
- q'_0 = ε-κλείσιμο(q_0) (ε-κλείσιμο(q_i)= $\{p \mid p$ προσβάσιμη κατάσταση από την q_i μόνο με ε-κινήσεις$\}$)
- $F' = \{R \in Q' \mid R \cap F \neq \varnothing\}$, δηλαδή μια κατάσταση του *M'* είναι τελική αν περιέχει μια τελική κατάσταση του *M*.
- $\delta'(R,a) = \{q \in Q \mid q \in$ ε-κλείσιμο$(\delta(r, a))$ για $r \in R\}$, δηλαδή $\delta'(R, a)$ είναι το σύνολο των καταστάσεων όπου μπορεί να βρεθεί το *M* ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση του *R* , κάνοντας μία *a*-κίνηση και χρησιμοποιώντας στη συνέχεια οσεσδήποτε ε-κινήσεις.

NFA$_\varepsilon$ ➔ DFA: παράδειγμα



ε-κλείσιμο της q_1=$\{q_1,q_2,q_5\}$
ε-κλείσιμο της q_2=$\{q_2\}$
ε-κλείσιμο της q_3=$\{q_3\}$
ε-κλείσιμο της q_4=$\{q_2,q_4\}$
ε-κλείσιμο της q_5=$\{q_5\}$
ε-κλείσιμο της q_6=$\{q_5,q_6\}$

Αρχική κατάσταση
$\{q_1,q_2,q_5\}$
Τελικές οι μπλέ

Q'	0	1
$>\{q_1,q_2,q_5\}$	$\{\}$	$\{q_3,q_5,q_6\}$
$\{q_3,q_5,q_6\}$	$\{q_2,q_4\}$	$\{q_5,q_6\}$
$\{q_2,q_4\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$
$\{q_5,q_6\}$	$\{\}$	$\{q_5,q_6\}$
$\{q_3\}$	$\{q_2,q_4\}$	$\{\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

NFA_ε ➔ DFA: εναλλακτική μέθοδος (σε NFA πρώτα)

- *Έστω το NFA_ε $M = (Q,\Sigma,q0,F,\delta)$.*
- Κατασκευάζουμε πρώτα ισοδύναμο NFA $M' = (Q,\Sigma,q_0,F',\delta')$ ως εξής:
  - $F' = F \cup \{q_0\}$ αν ε-κλείσιμο(q_0) περιέχει τελική, $F' = F$ αλλιώς.
  - $\delta'(q, a)$ = ε-κλείσιμο(δ(ε-κλείσιμο(q), a)), (δ επεκτ/νη)

δηλαδή $\delta'(q, a)$ είναι το σύνολο των καταστάσεων όπου μπορεί να βρεθεί το M ξεκινώντας από την κατάσταση q, χρησιμοποιώντας οσεσδήποτε ε-κινήσεις, μία a-κίνηση, και χρησιμοποιώντας ξανά οσεσδήποτε ε-κινήσεις.

- Από το M' κατασκευάζουμε ισοδύναμο DFA.

NFA_ε ➔ DFA: εναλλακτική μέθοδος (σε NFA πρώτα, ταχύτερα)

- *Έστω το NFA_ε $M = (Q,\Sigma,q0,F,\delta)$.*
- Κατασκευάζουμε πρώτα ισοδύναμο NFA $M' = (Q,\Sigma,q_0,F',\delta')$ ως εξής:
  - F' : είναι το F μαζί με *κάθε* κατάσταση q για την οποία το ε-κλείσιμο(q) περιέχει κάποια τελική.
  - $\delta'(q, a) = \delta(\varepsilon\text{-κλείσιμο}(q), a)$, (δ επεκτ/νη)

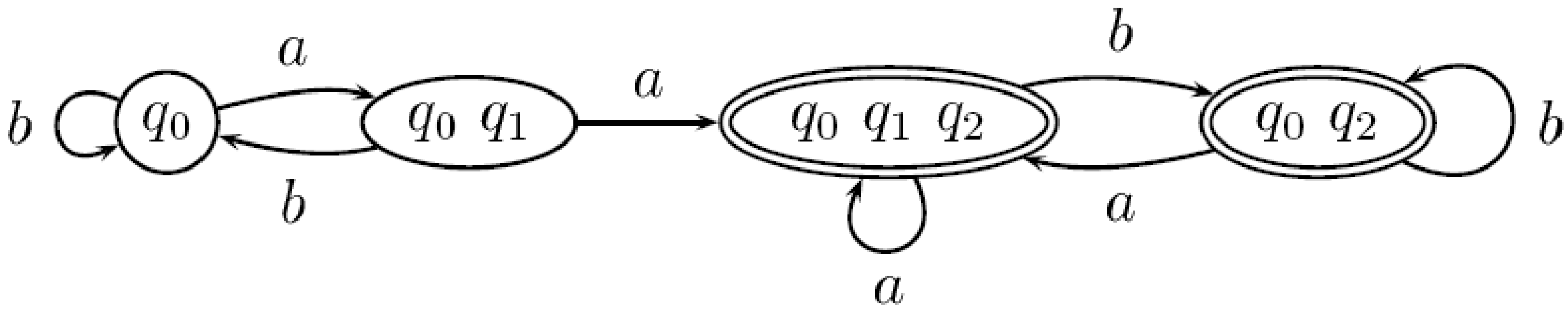
δηλαδή $\delta'(q, a)$ είναι το σύνολο των καταστάσεων όπου μπορεί να βρεθεί το *M* ξεκινώντας από την κατάσταση *q*, χρησιμοποιώντας οσεσδήποτε ε-κινήσεις πρώτα, και μετά μία *a*-κίνηση *(δηλ. <u>χωρίς</u> ε-κινήσεις μετά το a)*.

- Από το *M'* κατασκευάζουμε ισοδύναμο DFA.

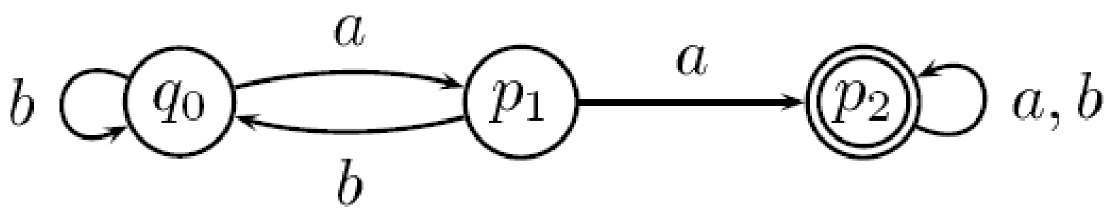
Ελαχιστοποίηση DFA: παράδειγμα

$L_4 = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid w$ περιέχει 2 συνεχόμενα $a\ \}$:

Αρχικό DFA

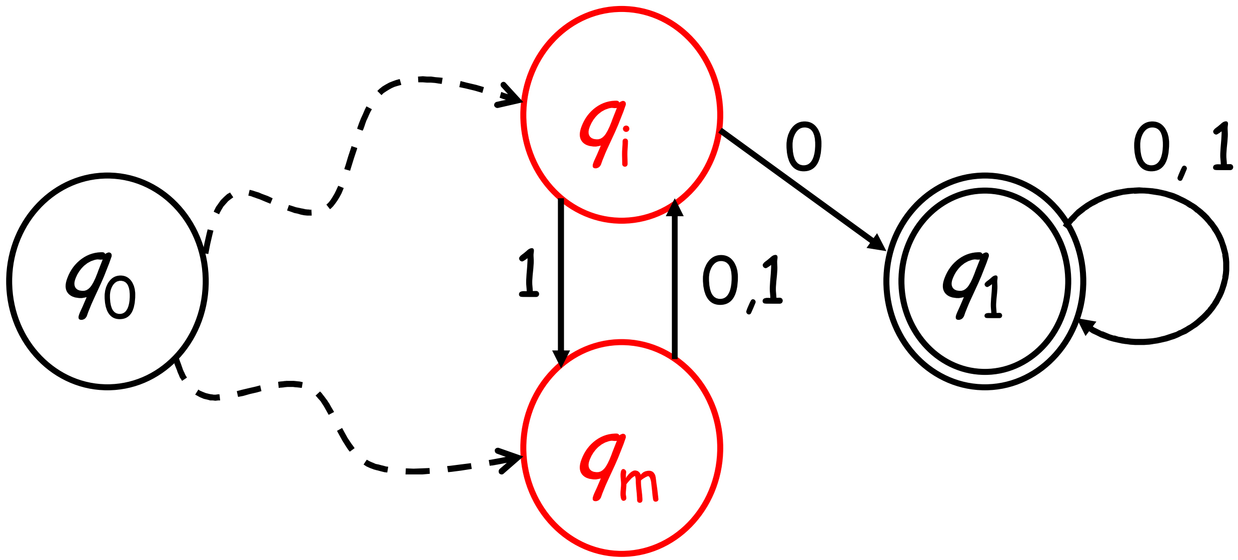


Ελάχιστο DFA



Ελαχιστοποίηση DFA (i)

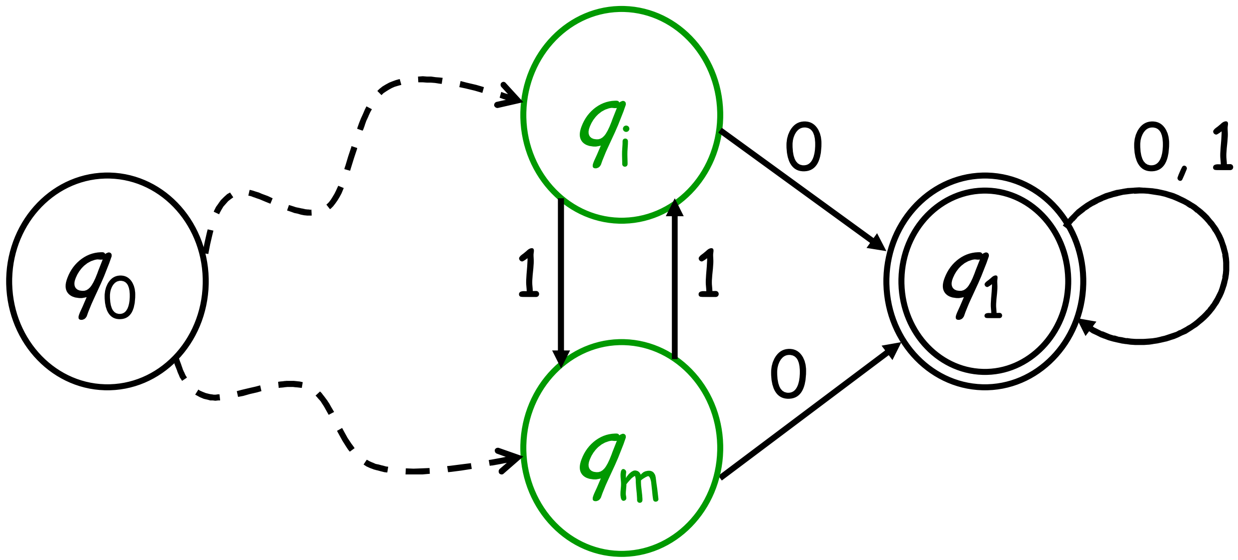
Δύο καταστάσεις DFA λέγονται *μη ισοδύναμες*, δηλαδή *διακρίσιμες*, αν υπάρχει συμβολοσειρά που να οδηγεί την μία από αυτές σε τελική κατάσταση, ενώ την άλλη όχι.



Ελαχιστοποίηση DFA (ii)

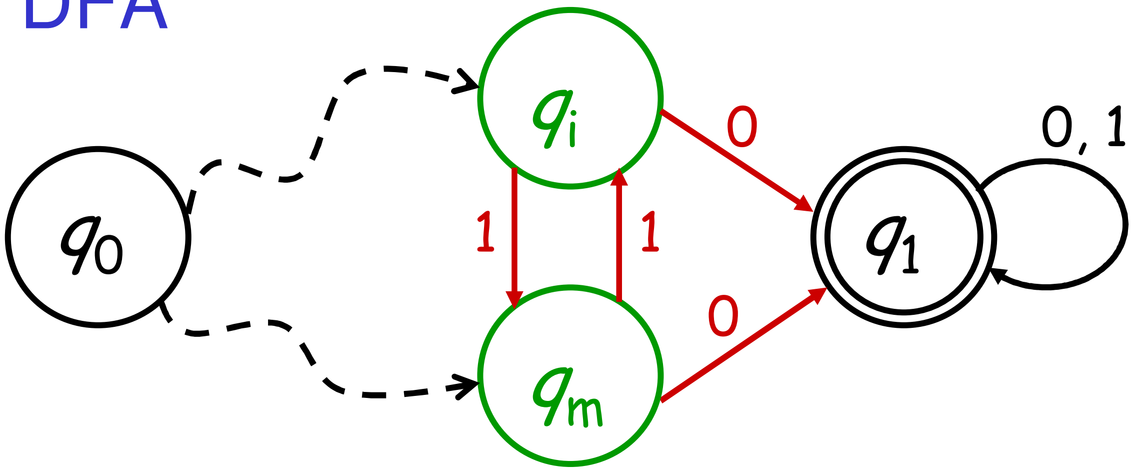
Δύο καταστάσεις μπορούν να συγχωνευτούν σε μία (είναι *ισοδύναμες*) αν:

οδηγούν με ίδιες συμβολοσειρές σε ίδιο αποτέλεσμα

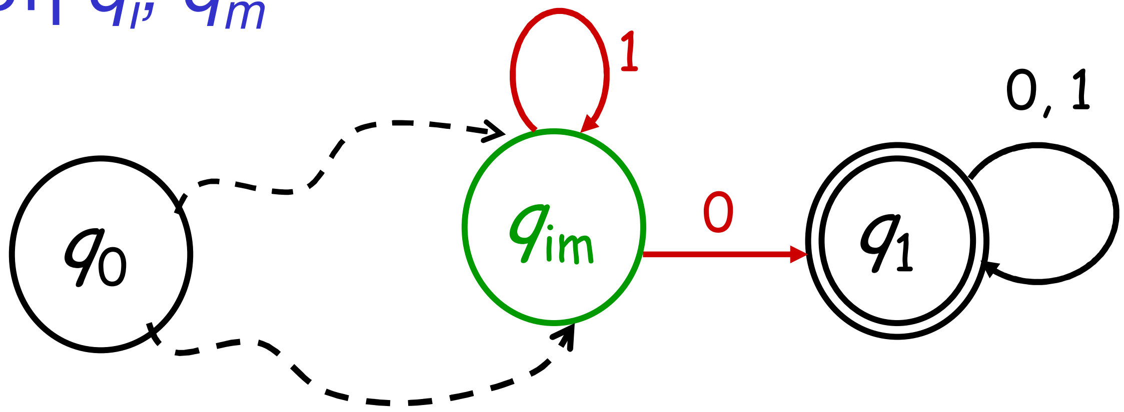


Ελαχιστοποίηση DFA (iii)

Αρχικό DFA

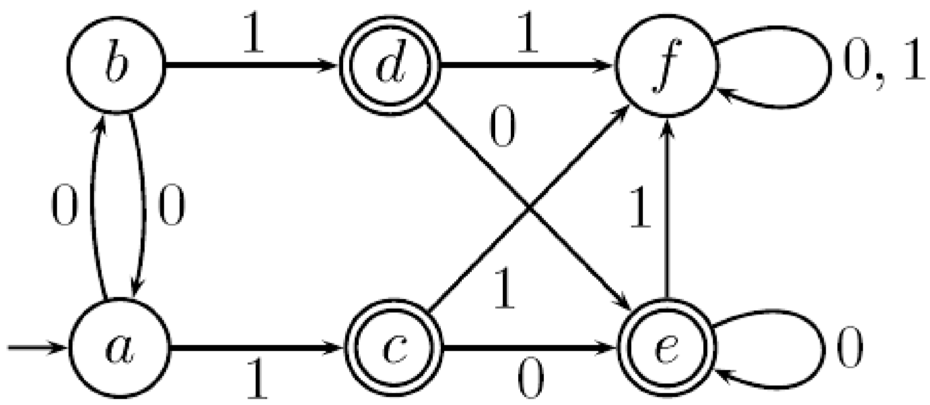


Συγχώνευση q_i, q_m

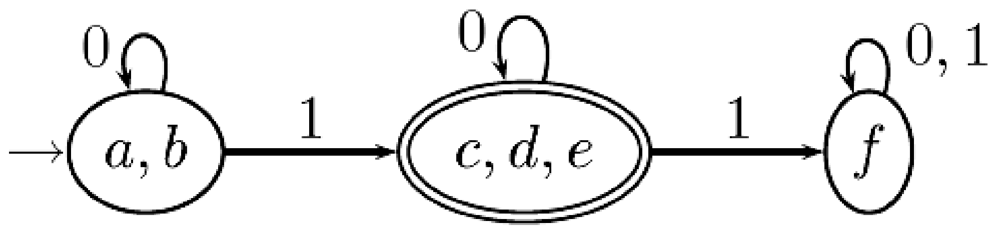


Ελαχιστοποίηση DFA: 2ο παράδειγμα

Αρχικό DFA

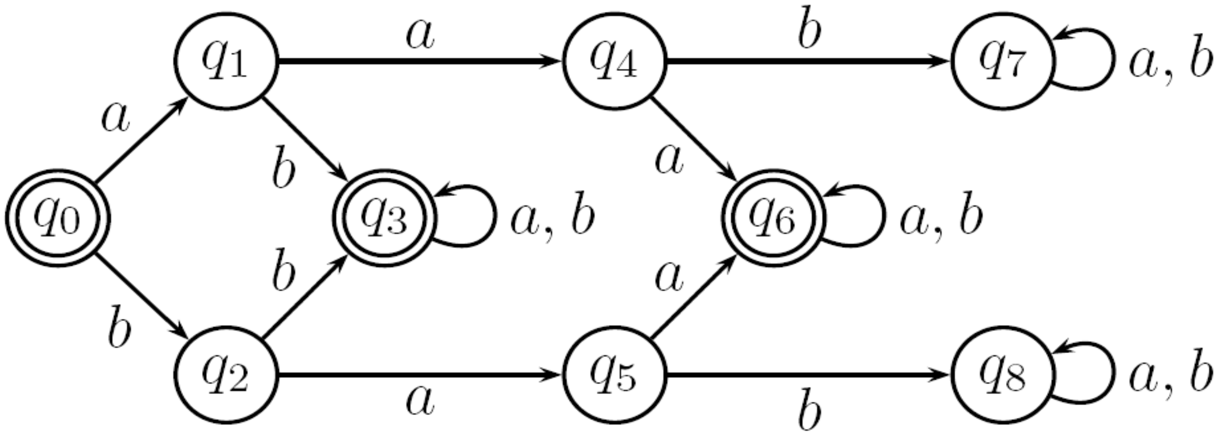


Ελάχιστο DFA

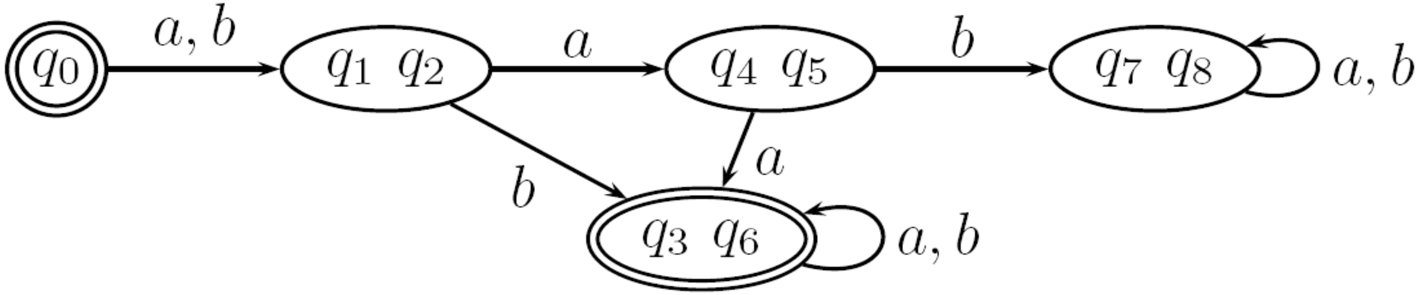


Ελαχιστοποίηση DFA: 3ο παράδειγμα

Αρχικό DFA



Ελάχιστο DFA



Μέθοδος ελαχιστοποίησης DFA

- Δύο καταστάσεις λέγονται ***k*-διακρίσιμες** αν με *κάποια συμβολοσειρά* μήκους <u>ακριβώς *k*</u> οδηγούν σε διαφορετικό αποτέλεσμα (και δεν είναι *i*-διακρίσιμες για κανένα *i*<*k*). Έτσι, δύο καταστάσεις είναι:
  - 0-διακρίσιμες ανν η μία είναι τελική ενώ η άλλη όχι.
  - (*i*+1)-διακρίσιμες ανν με *κάποιο σύμβολο* οδηγούν σε *i*-διακρίσιμες καταστάσεις.
- Δύο καταστάσεις λέγονται **ισοδύναμες** αν δεν είναι *k*-διακρίσιμες για *οποιοδήποτε k*.

Μέθοδος ελαχιστοποίησης DFA

- Ιδέα μεθόδου: για κάθε $i = 0, 1, 2, \ldots$ εντοπίζουμε τα *i-διακρίσιμα* ζεύγη καταστάσεων έως ότου να μην προκύπτουν άλλα. Τα υπόλοιπα ζεύγη είναι ισοδύναμα.
- Γιατί δουλεύει:

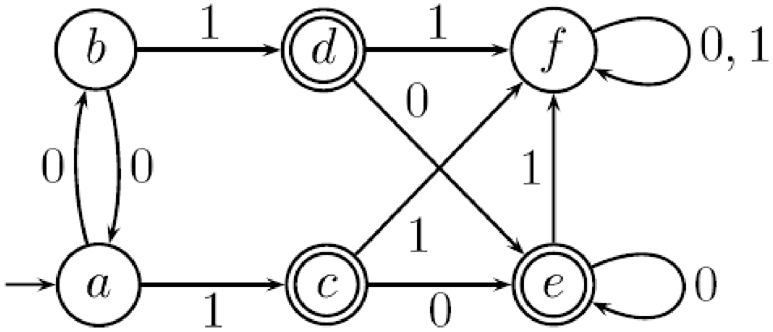
  δεν υπάρχουν (i+1)-διακρίσιμες καταστάσεις αν δεν υπάρχουν i-διακρίσιμες καταστάσεις

Η μέθοδος συστηματικά

Κατασκευάζουμε τριγωνικό πίνακα για να συγκρίνουμε κάθε ζεύγος καταστάσεων. Γράφουμε X_k στην αντίστοιχη θέση του πίνακα την πρώτη φορά που διαπιστώνουμε ότι δύο καταστάσεις είναι *k*-διακρίσιμες, ως εξής:

- Αρχικά γράφουμε X_0 σε όλα τα ζεύγη κατ/σεων που είναι 0-διακρίσιμες γιατί η μία είναι τελική και η άλλη όχι.
- Σε κάθε "γύρο" $i+1$, εξετάζουμε όλα τα μη σημειωμένα ζεύγη και γράφουμε X_{i+1} σε ένα ζεύγος αν από τις δύο καταστάσεις του με *ένα σύμβολο* το DFA πηγαίνει σε *i*-διακρίσιμες καταστάσεις (ήδη σημ/νες με X_i).
- Επαναλαμβάνουμε μέχρι που σε κάποιο γύρο *k* να μην υπάρχει ζεύγος που να σημειωθεί με X_k.
- Τα μη σημειωμένα ζεύγη αντιστοιχούν σε ισοδύναμες καταστάσεις (που επομένως συγχωνεύονται).

Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου

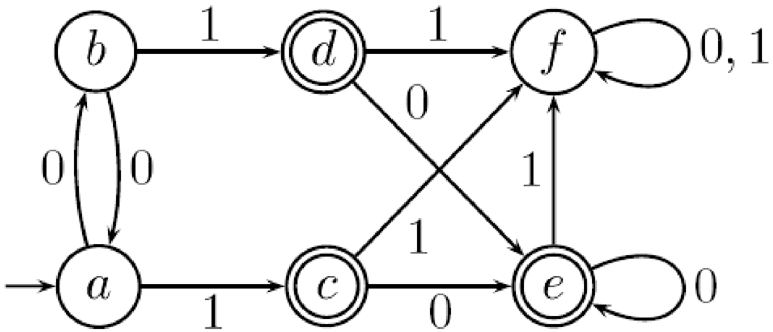


b					
c	X_0	X_0			
d	X_0	X_0			
e	X_0	X_0			
f			X_0	X_0	X_0
	a	b	c	d	e

Γύρος 0:

εννέα ζεύγη
0-διακρίσιμων
καταστάσεων

Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου

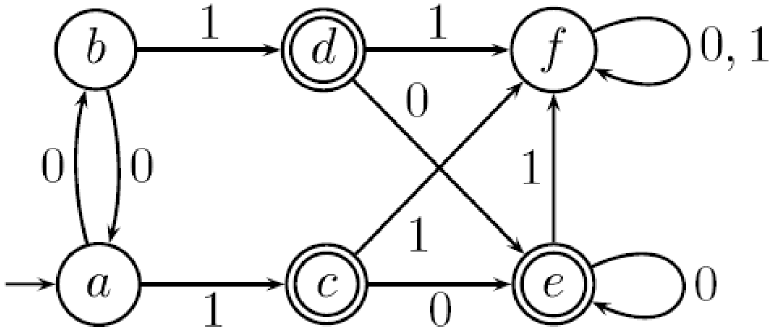


b					
c	X_0	X_0			
d	X_0	X_0			
e	X_0	X_0			
f	X_1	X_1	X_0	X_0	X_0
	a	b	c	d	e

Γύρος 1:

δύο ζεύγη
1-διακρίσιμων
καταστάσεων

Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου

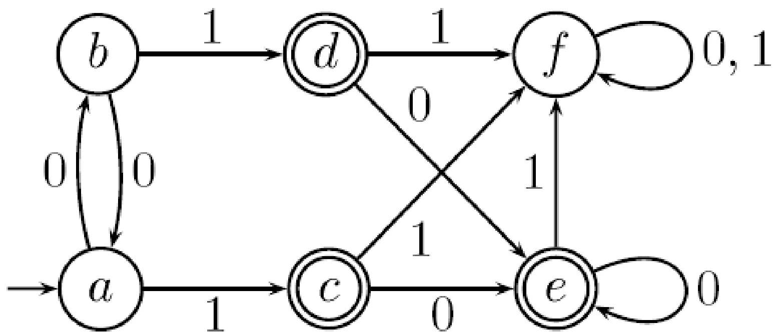


b					
c	X_0	X_0			
d	X_0	X_0			
e	X_0	X_0			
f	X_1	X_1	X_0	X_0	X_0
	a	b	c	d	e

Γύρος 2:

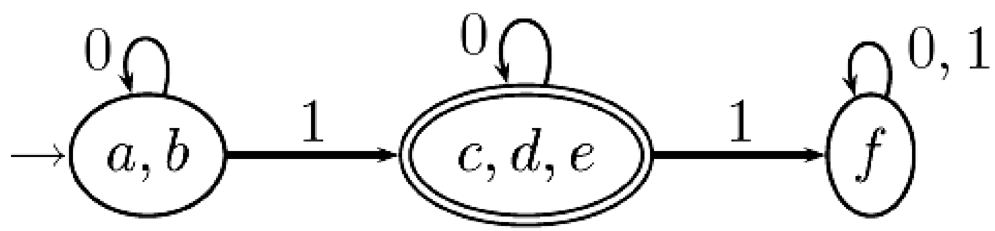
κανένα ζεύγος
2-διακρίσιμων
καταστάσεων

Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου



b					
c	X_0	X_0			
d	X_0	X_0			
e	X_0	X_0			
f	X_1	X_1	X_0	X_0	X_0
	a	b	c	d	e

Τελικά οι ισοδύναμες καταστάσεις είναι $a \equiv b$, $c \equiv d \equiv e$.
Το ελάχιστο αυτόματο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Γλώσσες, αυτόματα, γραμματικές

- Τυπικές γλώσσες: χρησιμοποιούνται για την περιγραφή υπολογιστικών προβλημάτων αλλά και γλωσσών προγραμματισμού.
- Αυτόματα: χρησιμεύουν για την αναγνώριση τυπικών γλωσσών και για την κατάταξη της δυσκολίας των αντίστοιχων προβλημάτων.
- Τυπικές γραμματικές: άλλος τρόπος περιγραφής τυπικών γλωσσών. Κάθε τυπική γραμματική *παράγει* μια τυπική γλώσσα.

Θεωρία γλωσσών και γραμματικών

Εφαρμογές σε:

- Ψηφιακή Σχεδίαση,
- Γλώσσες Προγραμματισμού,
- Μεταγλωττιστές,
- Τεχνητή Νοημοσύνη,
- Θεωρία Πολυπλοκότητας

Ιστορικά σημαντικοί ερευνητές:

- Chomsky, Backus, Rabin, Scott, Kleene, Greibach, κ.α.

Τυπικές γλώσσες

- Πρωταρχικές έννοιες: σύμβολα, παράθεση.
- Αλφάβητο: πεπερασμένο σύνολο συμβόλων. Π.χ. {0,1}, {x,y,z}, {a,b}.
- Λέξη (ή συμβολοσειρά, ή πρόταση) ενός αλφαβήτου: πεπερασμένου μήκους ακολουθία συμβόλων του αλφαβήτου. Π.χ. 011001, abbbab.
- $|w|$: μήκος λέξης w.
- ε : κενή λέξη, $|\varepsilon| = 0$.
- Άλλες έννοιες: πρόθεμα (prefix), κατάληξη (suffix), υποσυμβολοσειρά (substring), αντίστροφη (reversal), παλινδρομική ή καρκινική (palindrome).

Τυπικές γλώσσες (συν.)

- vw = παράθεση λέξεων v και w.
- Ισχύει: $\varepsilon x = x\varepsilon = x$, για κάθε συμβολοσειρά x.
- ορισμός x^n με πρωταρχική αναδρομή:

$$\begin{cases} x^0 = \varepsilon \\ x^{k+1} = x^k x \end{cases}$$

- Σ^*: το σύνολο όλων των λέξεων του αλφαβήτου Σ.
- Γλώσσα από το αλφάβητο Σ: κάθε σύνολο συμβολοσειρών $L \subseteq \Sigma^*$.

Τυπικές γραμματικές

- Συστηματικός τρόπος μετασχηματισμού συμβολοσειρών μέσω κανόνων παραγωγής.
- Αλφάβητο: τερματικά και μη τερματικά σύμβολα και ένα αρχικό σύμβολο (μη τερματικό).
- Πεπερασμένο σύνολο κανόνων της μορφής $\alpha \rightarrow \beta$: ορίζουν δυνατότητα αντικατάστασης της συμβολοσειράς α με την συμβολοσειρά β.
- Κάθε τυπική γραμματική παράγει μια τυπική γλώσσα: το σύνολο των συμβολοσειρών (με *τερματικά σύμβολα* μόνο) που παράγονται από το αρχικό σύμβολο.
- Λέγονται και συστήματα μεταγραφής (rewriting systems) αλλά και γραμματικές δομής φράσεων (phrase structure grammars).

Παράδειγμα γραμματικής για την γλώσσα των περιττών αριθμών

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A\,1 \\
A &\rightarrow A\,0 \\
A &\rightarrow A\,1 \\
A &\rightarrow \varepsilon
\end{aligned}
$$

S: το αρχικό σύμβολο

A: μη τερματικό σύμβολο

0,1: τερματικά σύμβολα

ε: η κενή συμβολοσειρά

- Τα *S* και *A* αντικαθίστανται με βάση τους κανόνες.
- Κάθε περιττός προκύπτει από το S με κάποια σειρά έγκυρων αντικαταστάσεων.
- Κανονική παράσταση: (0+1)*1

Τυπικές γραμματικές: ορισμοί (i)

Μια **τυπική γραμματική** G αποτελείται από:

- ένα αλφάβητο V από *μη τερματικά* σύμβολα (μεταβλητές),
- ένα αλφάβητο T από *τερματικά* σύμβολα (σταθερές), τ.ώ. $V \cap T = \varnothing$,
- ένα πεπερασμένο σύνολο P από *κανόνες παραγωγής*, δηλαδή διατεταγμένα ζεύγη (α,β), όπου $\alpha,\beta \in (V \cup T)^*$ και $\alpha \neq \varepsilon$ (σύμβαση: γράφουμε $\alpha \rightarrow \beta$ αντί για (α,β)),
- ένα *αρχικό σύμβολο* (ή αξίωμα) $S \in V$.

Τυπικές γραμματικές: ορισμοί (ii)

Σύμβαση για τη χρήση γραμμάτων:

- $a, b, c, d, \ldots \in T$: πεζά λατινικά, τα αρχικά του αλφαβήτου, συμβολίζουν τερματικά
- $A, B, C, D, \ldots \in V$: κεφαλαία λατινικά συμβολίζουν μη τερματικά
- $u, v, w, x, y, z \ldots \in T^*$: πεζά λατινικά, τα τελευταία του αλφαβήτου, συμβολίζουν συμβολοσειρές τερματικών
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \in (V \cup T)^*$: ελληνικά συμβολίζουν οποιεσδήποτε συμβολοσειρές (τερματικών και μη)

Τυπικές γραμματικές: ορισμοί (iii)

Ορισμοί για τις παραγωγές:

- Λέμε ότι $\gamma_1\alpha\gamma_2$ *παράγει* $\gamma_1\beta\gamma_2$,και συμβολίζουμε με $\gamma_1\alpha\gamma_2 \Rightarrow \gamma_1\beta\gamma_2$, αν ο $\alpha \rightarrow \beta$ είναι κανόνας παραγωγής (δηλαδή $(\alpha,\beta) \in P$).
- Συμβολίζουμε με $\stackrel{*}{\Rightarrow}$ το ανακλαστικό, μεταβατικό κλείσιμο του $\Rightarrow$, δηλαδή, $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} \beta$ («το α παράγει το β») σημαίνει ότι υπάρχει μια ακολουθία: $\alpha \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \ldots \alpha_k \Rightarrow \beta$.
- *Γλώσσα που παράγεται* από τη γραμματική G:
$$L(G) := \{w \in T^* \mid S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\}$$
- γραμματικές G_1, G_2 *ισοδύναμες* αν $L(G_1) = L(G_2)$.

Παράδειγμα τυπικής γραμματικής

$$G\colon\ V = \{S\},\ T = \{a, b\},\ P = \{S \to \varepsilon | aSb\}$$

$S \to \varepsilon \,/\, \alpha Sb$: σύντμηση των $S \to \varepsilon$ και $S \to \alpha Sb$

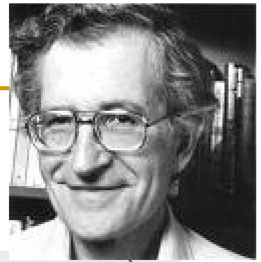
Μία δυνατή ακολουθία παραγωγής:

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaabbb$$

Γλώσσα που παράγεται:

$$L(G) = \{a^n b^n \mid n \in N\}$$

Ιεραρχία Γραμματικών Chomsky



- τύπου 0: γενικές γραμματικές (general, phrase structure, semi-Thue).

$$\alpha \longrightarrow \beta, \ \alpha \neq \varepsilon$$

- τύπου 1: γραμματικές με συμφραζόμενα ή μονοτονικές (context sensitive, monotonic).

$$\alpha \longrightarrow \beta, \quad |\alpha| \leq |\beta| \text{ (επιτρέπεται και: } S \longrightarrow \varepsilon)$$

- τύπου 2: γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα (context free).

$$A \longrightarrow \alpha \qquad (A \in V)$$

- τύπου 3: κανονικές γραμματικές (regular).

δεξιογραμμικές: $A \longrightarrow w,\ A \longrightarrow wB \quad (w \in T^*,\ A, B \in V)$ ή

αριστερογραμμικές: $A \longrightarrow w,\ A \longrightarrow Bw \quad (w \in T^*,\ A, B \in V)$

Γνήσια ιεράρχηση: τύπου 3 $\subset$ τύπου 2 $\subset$ τύπου 1 $\subset$ τύπου 0

Ιεραρχία Chomsky: μια εκπληκτική σύμπτωση (;)

- τύπου 0 ↔ TM (μηχανές Turing)
- τύπου 1 ↔ LBA (γραμμικά περιορισμένα αυτόματα)
- τύπου 2 ↔ PDA (pushdown automata)
- τύπου 3 ↔ DFA (και NFA)

Κανονικές Γραμματικές

- Οι **κανονικές γραμματικές** είναι γραμματικές όπου όλοι οι κανόνες είναι της μορφής:
  - Δεξιογραμμικοί (right linear)

    $$A \rightarrow wB \text{ ή } A \rightarrow w$$

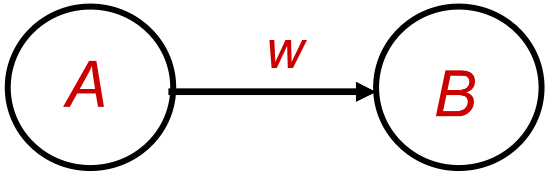
  - Αριστερογραμμικοί (left linear)

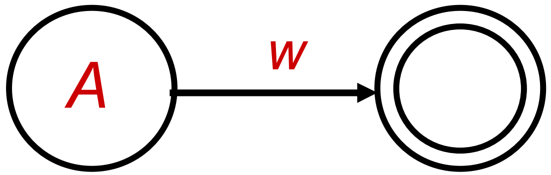
    $$A \rightarrow Bw \text{ ή } A \rightarrow w$$

  (όπου *w* είναι μια ακολουθία από τερματικά σύμβολα της γλώσσας)

- **Θεώρημα**: *οι* κανονικές γλώσσες *ταυτίζονται με τις γλώσσες που παράγονται από* κανονικές γραμματικές.

Ισοδυναμία κανονικών γραμματικών και DFA

- Χρησιμοποιούμε τη δεξιογραμμική μορφή:
  - $A \rightarrow wB$ αντιστοιχεί με 

  - $A \rightarrow w$ αντιστοιχεί με 

  - S αντιστοιχεί με q_0

Μία ακόμη ισοδυναμία!

Θεώρημα: *οι* κανονικές γλώσσες *ταυτίζονται με τις γλώσσες που περιγράφονται από* κανονικές παραστάσεις.

Κανονικές παραστάσεις (regular expressions)

Έστω L, L_1, L_2 γλώσσες επί του ίδιου αλφαβήτου Σ.

- $L_1 L_2 := \{uv \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2\}$: παράθεση
- $L_1 \cup L_2 := \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$: ένωση
- $L_1 \cap L_2 := \{w \mid w \in L_1 \wedge w \in L_2\}$: τομή
- $L^0 := \{\varepsilon\}$, $L^{n+1} := L L^n$
- $L^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$: άστρο του Kleene
- $L^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$

Ορισμός κανονικών παραστάσεων

Κανονικές παραστάσεις: παριστάνουν γλώσσες που προκύπτουν από απλά σύμβολα ενός αλφαβήτου με τις πράξεις παράθεση, ένωση, και άστρο του Kleene.

- $\varnothing$: παριστάνει κενή γλώσσα
- ε : παριστάνει $\{\varepsilon\}$
- α : παριστάνει $\{\alpha\}$, $\alpha \in \Sigma$
- $(r+s)$: παριστάνει $R \cup S$, $R = L(r)$, $S = L(s)$
- (rs) : παριστάνει RS, $R = L(r)$, $S = L(s)$
- (r^*) : παριστάνει R^*, $R = L(r)$

όπου $L(t)$ η γλώσσα που παριστάνεται από καν. παρ. t

Παραδείγματα κανονικών παραστάσεων

$L_1 = a(a+b)^*$

$L_2 = (b^*ab^*a)^*b^* = (b+ab^*a)^*$

L_3 δεν είναι δυνατόν να παρασταθεί με κανονική παράσταση

$L_4 = (a+b)^*aa(a+b)^*$ (τουλάχιστον δύο συνεχόμενα a)

$\overline{L_4} = (a+\varepsilon)(ba+b)^*$ (όχι συνεχόμενα a)

$L_5 = a^*b^*$

Προτεραιότητα τελεστών:

- άστρο Kleene
- παράθεση
- ένωση

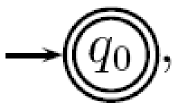
Ισοδυναμία κανονικών παραστάσεων και αυτομάτων

Θεώρημα. Μια γλώσσα L μπορεί να παρασταθεί με *κανονική παράσταση* ανν είναι *κανονική* (δηλαδή $L=L(M)$ για κάποιο πεπερασμένο αυτόματο M).

Ιδέα απόδειξης:

‘=>’ : Επαγωγή στη δομή της κανονικής παράστασης r :

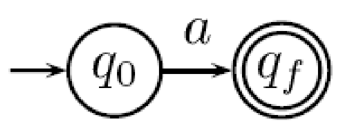
1. Επαγωγική Βάση:

$r = \varepsilon$: 

,

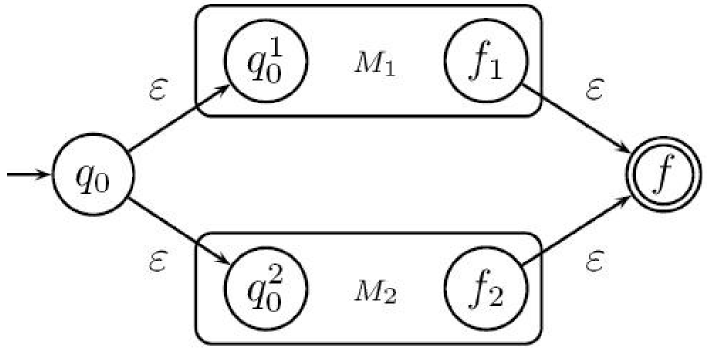
$r = \emptyset$: 

,

$r = a \in \Sigma$: 

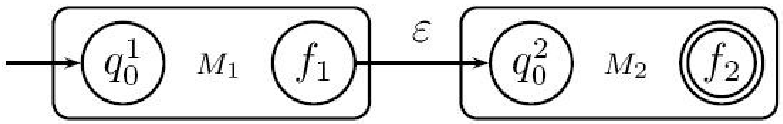
2. Επαγωγικό βήμα. Έστω ότι για r_1, r_2 έχουμε αυτόματα M_1, M_2, με τελικές καταστάσεις f_1, f_2:

Περίπτωση α: $r = r_1 + r_2$



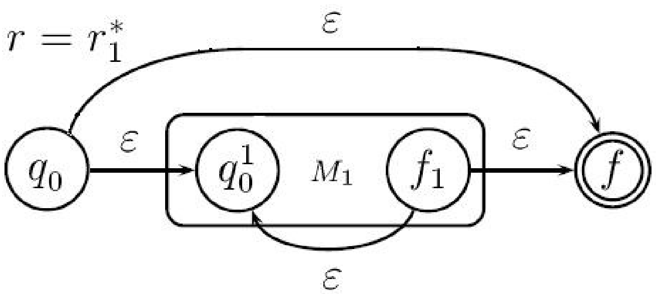
$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$

Περίπτωση β: $r = r_1 r_2$



$L(M) = L(M_1)L(M_2)$

Περίπτωση γ: $r = r_1^*$

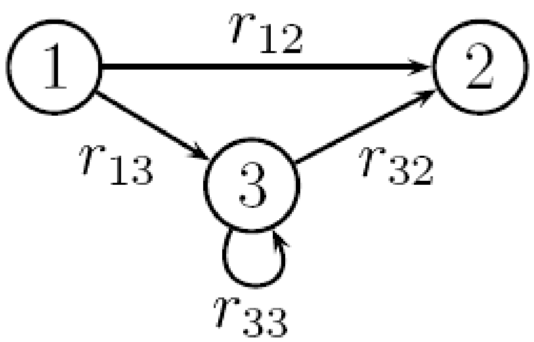


$L(M) = L(M_1)^*$

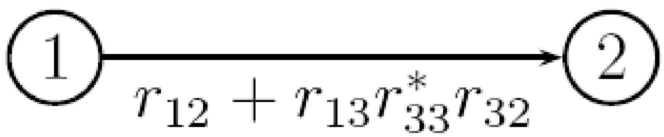
Ισοδυναμία κανονικών παραστάσεων και αυτομάτων (συν.)

‘<=’ :   Κατασκευή κανονικής παράστασης από FA (GNFA).

Απαλείφουμε ενδιάμεσες καταστάσεις σύμφωνα με το σχήμα:

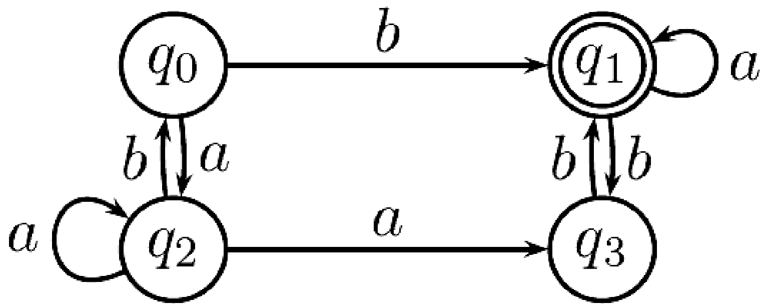


$\Longrightarrow$

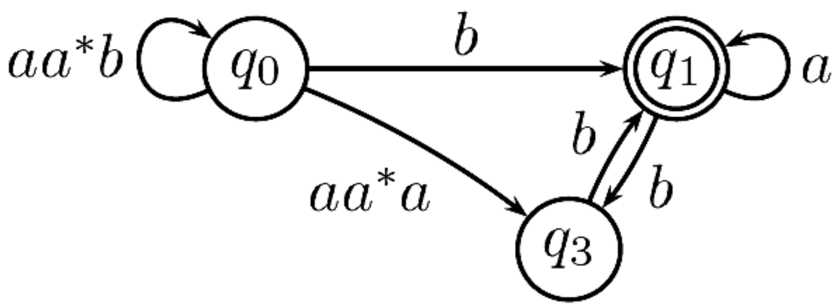


Παράδειγμα κατασκευής κανονικής παράστασης από FA

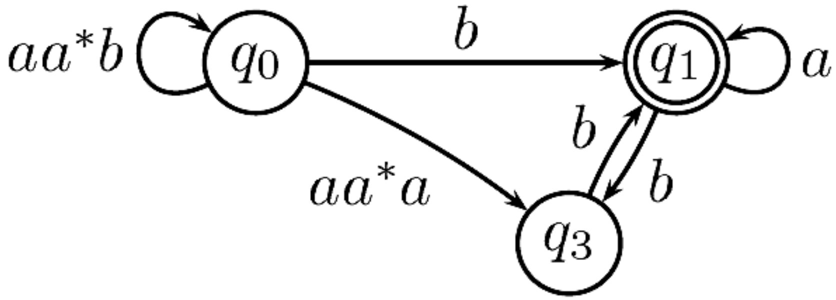
Αρχικό DFA



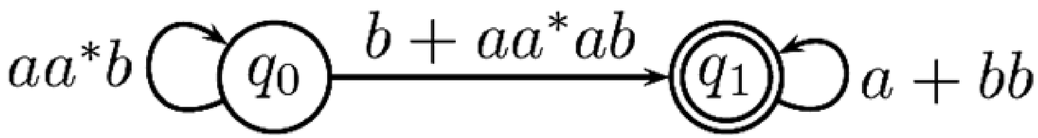
Μετά από διαγραφή q_2



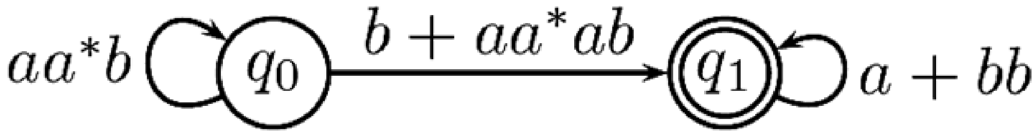
Παράδειγμα κατασκευής κανονικής παράστασης από FA



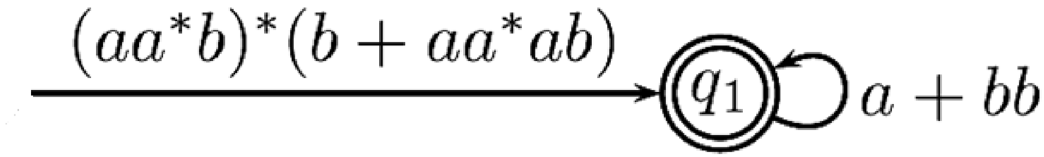
Διαγραφή q_3



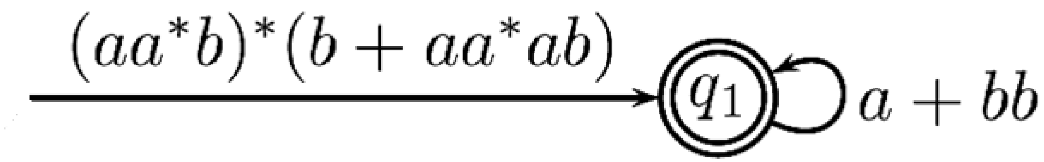
Παράδειγμα κατασκευής κανονικής παράστασης από FA



Διαγραφή q_0



Παράδειγμα κατασκευής κανονικής παράστασης από FA



Τελική παράσταση

$$\boxed{(aa^*b)^*(b + aa^*ab)(a + bb)^*}$$

Ποιες γλώσσες είναι κανονικές;

- Όλες οι πεπερασμένες.
- Όσες σχηματίζονται από κανονικές με τις πράξεις: παράθεση, ένωση, άστρο Kleene,
- αλλά και συμπλήρωμα, τομή, αναστροφή (άσκηση), κ.ά.
- Γινόμενο αυτομάτων (product of automata): τρόπος κατασκευής DFA για τομή (αλλά και ένωση) κανονικών γλωσσών.

Γινόμενο αυτομάτων DFA

- Έστω δύο DFA M_1, M_2 με *n*, *m* καταστάσεις αντίστοιχα ($Q_1=\{q_0, ..., q_{n-1}\}$, $Q_2=\{p_0, ..., p_{m-1}\}$) και κοινό αλφάβητο, που αναγνωρίζουν γλώσσες L_1, L_2 αντίστοιχα.
- Το **γινόμενο των M_1, M_2** είναι ένα DFA με $m \cdot n$ καταστάσεις, μία για κάθε ζεύγος καταστάσεων του αρχικού αυτομάτου (σύνολο καταστάσεων $Q = Q_1 \times Q_2$), το ίδιο αλφάβητο και αρχική κατάσταση (q_0,p_0).
- Συνάρτηση μετάβασης: $\delta'((q_i,p_k),\sigma)=(q_{i'}, p_{k'}) \Leftrightarrow \delta(q_i,\sigma)=q_{i'} \wedge \delta(p_k,\sigma)=p_{k'}$
- Τελικές καταστάσεις: ανάλογα με την πράξη μεταξύ L_1, L_2 που θέλουμε. Για τομή θέτουμε ως τελικές ζεύγη όπου και οι δύο τελικές στα M_1, M_2, για ένωση ζεύγη που περιέχουν μία τουλάχιστον τελική.
- Παρατήρηση: εύκολη υλοποίηση και άλλων πράξεων μεταξύ L_1, L_2 (διαφορά, συμμετρική διαφορά) με κατάλληλο ορισμό των τελικών καταστάσεων.

Γινόμενο αυτομάτων NFA

- Ορίζεται με παρόμοιο τρόπο.
- Χρειάζεται προσοχή στις ε-κινήσεις και στο συνδυασμό μεταβάσεων σε junk states με κανονικές μεταβάσεις.

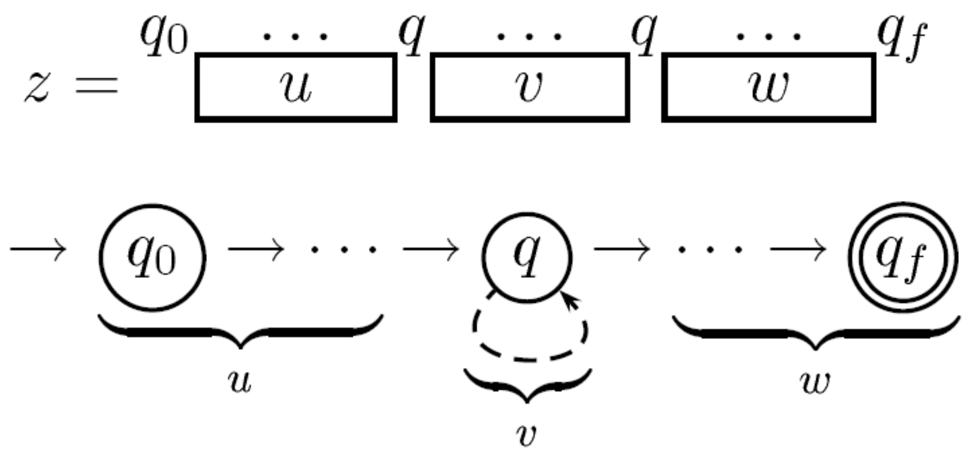
Είναι όλες οι γλώσσες κανονικές;

- Η απάντηση είναι «όχι»

- Για να το αποδείξουμε χρησιμοποιούμε ένα σημαντικό θεώρημα που λέγεται Pumping Lemma (Λήμμα Άντλησης)

Pumping Lemma (διαίσθηση)

- Αν μια γλώσσα *L* είναι κανονική τότε την αποδέχεται ένα DFA με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων, έστω *n*.
- Έστω λέξη *z* με $|z|>=n$ που ανήκει στη γλώσσα, άρα γίνεται αποδεκτή από το αυτόματο.
- Καθώς επεξεργαζόμαστε το *z*, το αυτόματο πρέπει να περάσει ξανά από κάποια κατάσταση (αρχή περιστερώνα):



- Αφού $z = uvw \in L$ θα πρέπει και $uv^iw \in L$, για κάθε $i \in N$

Pumping Lemma (με λόγια)

Έστω κανονική γλώσσα L. Τότε:

- υπάρχει ένας φυσικός n (= πλήθος καταστάσεων του DFA) ώστε:
- για κάθε $z \in L$ με μήκος $|z| \geq n$
- υπάρχει «σπάσιμο» του z σε u, v, w, δηλαδή $z = uvw$, με $|uv| \leq n$ και $|v| > 0$
- ώστε για κάθε i = 0, 1, 2, ... :

$$uv^iw \in L$$

Απόδειξη ότι μια γλώσσα δεν είναι κανονική

Χρήση του Pumping Lemma για να δείξουμε ότι μια (μη πεπερασμένη) γλώσσα L *δεν είναι κανονική*:

Έστω η L κανονική. Τότε:

- το PL λέει ότι υπάρχει n. Εμείς για κάθε n
- επιλέγουμε κατάλληλο $z \in L$ με μήκος $|z| \geq n$
- το PL λέει ότι υπάρχει «σπάσιμο» $z = uvw$, με $|uv| \leq n$ και $|v| > 0$. Εμείς για κάθε «σπάσιμο» $z = uvw$, με $|uv| \leq n$ και $|v| > 0$
- επιλέγουμε i ώστε η λέξη uv^iw να μην είναι στη γλώσσα L ΑΤΟΠΟ

(*adversary argument*)

Παράδειγμα χρήσης Pumping Lemma (i)

- **Θεώρημα.** *Η γλώσσα L = {z | z έχει το ίδιο πλήθος 0 και 1} δεν είναι κανονική.*

- *Απόδειξη*: Έστω L κανονική. Τότε:
  - το PL λέει ότι υπάρχει n. Εμείς για κάθε n
  - επιλέγουμε $z = 0^n 1^n \in L$ με μήκος $|z| = 2n > n$

$$z = \underbrace{000000000\ldots0}_{n}\underbrace{111111111\ldots1}_{n}$$

  - το PL λέει ότι υπάρχει «σπάσιμο» $z = uvw$, με $|uv| \leq n$ και $|v| > 0$. Εμείς για κάθε «σπάσιμο» $z = uvw$, με $|uv| \leq n$ και $|v| > 0$

Παράδειγμα χρήσης Pumping Lemma (ii)

- παρατηρούμε ότι αναγκαστικά $v = 0^k$ για κάποιο k:
  - $w = \underbrace{0...0}_{u}\underbrace{0...0}_{v}\underbrace{0...0111111111...1}_{w}$

- και επιλέγουμε $i = 2$, διαπιστώνοντας ότι $uv^iw = uv^2w$ δεν ανήκει στην L.

ΑΤΟΠΟ

- Επομένως η L δεν είναι κανονική.

Δεύτερο παράδειγμα χρήσης PL (i)

Θεώρημα. *Η γλώσσα* $L = \{z \mid z = 0^i 1^j,\ i > j\}$ *δεν είναι κανονική.*

Απόδειξη: Έστω L κανονική. Τότε:

- το PL λέει ότι υπάρχει n. Εμείς για κάθε n
- επιλέγουμε $z = 0^{n+1}1^n \in L$ με μήκος $|z| = 2n+1 > n$
  - $z = \underbrace{000000000\ldots0}_{n+1}\underbrace{1111111\ldots1}_{n}$
- το PL λέει ότι υπάρχει «σπάσιμο» $z = uvw$, με $|uv| \le n$ και $|v| > 0$. Εμείς για κάθε «σπάσιμο» $z = uvw$, με $|uv| \le n$ και $|v| > 0$

Δεύτερο παράδειγμα χρήσης PL (ii)

- παρατηρούμε ότι αναγκαστικά $v = 0^k$ για κάποιο k:

$$z = \underbrace{0...0}_{u}\underbrace{0...0}_{v}\underbrace{0...0111111111...1}_{w}$$

  - όμως, η επανάληψη του v δίνει λέξεις της γλώσσας
  - από πρώτη άποψη αυτό φαίνεται προβληματικό…
  - όμως το λήμμα ορίζει ότι θα πρέπει για κάθε $i \geq 0$: $uv^iw \in L$

- επιλέγουμε $i = 0$: η λέξη uv^0w δεν είναι στην L.

ΑΤΟΠΟ

- Επομένως η L δεν είναι κανονική.

Προσοχή στη χρήση του PL

- Το Pumping Lemma είναι αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη για να είναι μια γλώσσα κανονική.
- Υπάρχουν μη κανονικές γλώσσες που ικανοποιούν τις συνθήκες του!
- Επομένως χρησιμεύει μόνο για απόδειξη μη κανονικότητας.

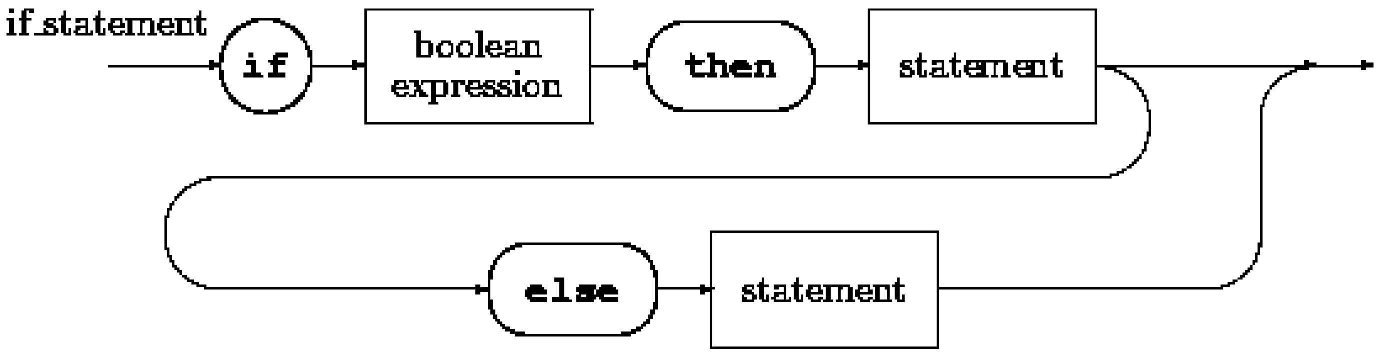
Γραμματικές για μη κανονικές γλώσσες

- Χωρίς συμφραζόμενα (context free, CF): τύπου 2, αντιστοιχία με αυτόματα στοίβας (pushdown automata, PDA)
- Με συμφραζόμενα (context sensitive, CS): τύπου 1, αντιστοιχία με γραμμικά περιορισμένα αυτόματα (linear bounded automata, LBA)
- Γενικές (general): τύπου 0, αντιστοιχία με μηχανές Turing (Turing machines, TM)

Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα (Context Free) (i)

Εφαρμογές σε:

- συντακτικό γλωσσών προγραμματισμού (Pascal, C, C++, Java)



- συντακτικό γλωσσών περιγραφής σελίδων web (HTML, XML), editors, ...

Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα (Context Free) (ii)

- Μορφή κανόνων: $A \rightarrow \alpha$, A μη τερματικό, $\alpha \in (V \cup T)^*$
- Παράδειγμα:

$$G_1: \quad V = \{S\},\ T = \{a, b\},\ P = \{S \longrightarrow \varepsilon, S \longrightarrow aSb\}$$

Δυνατή ακολουθία παραγωγής:

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaabbb$$

Γλώσσα που παράγεται:

$$\boxed{L(G_1) = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}^*\}}$$

Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα (Context Free) (iii)

- 2ο παράδειγμα:

G_2: $T = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,+,*\}$ $V = \{S\}$

P: $S \rightarrow S+S$, $S \rightarrow S*S$,

$S \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

Δυνατές ακολουθίες παραγωγής:

$S \Rightarrow 3$, $S \Rightarrow S+S \Rightarrow 3+S \Rightarrow 3+S*S \Rightarrow 3+4*7$

Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα (Context Free) (iv)

- 3ο παράδειγμα:

G_3: $V = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, και P περιέχει:

$$S \to aB \mid bA, \quad A \to a \mid aS \mid bAA, \quad B \to b \mid bS \mid aBB$$

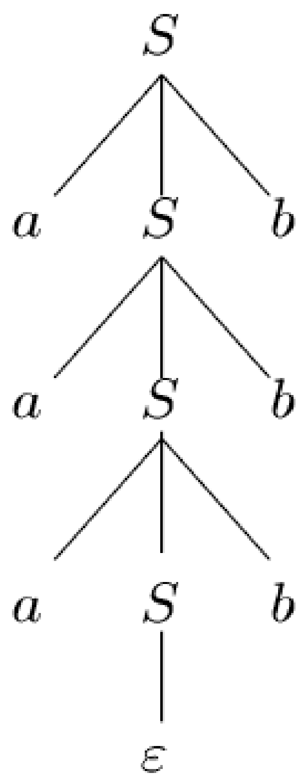
Δυνατή ακολουθία παραγωγής:

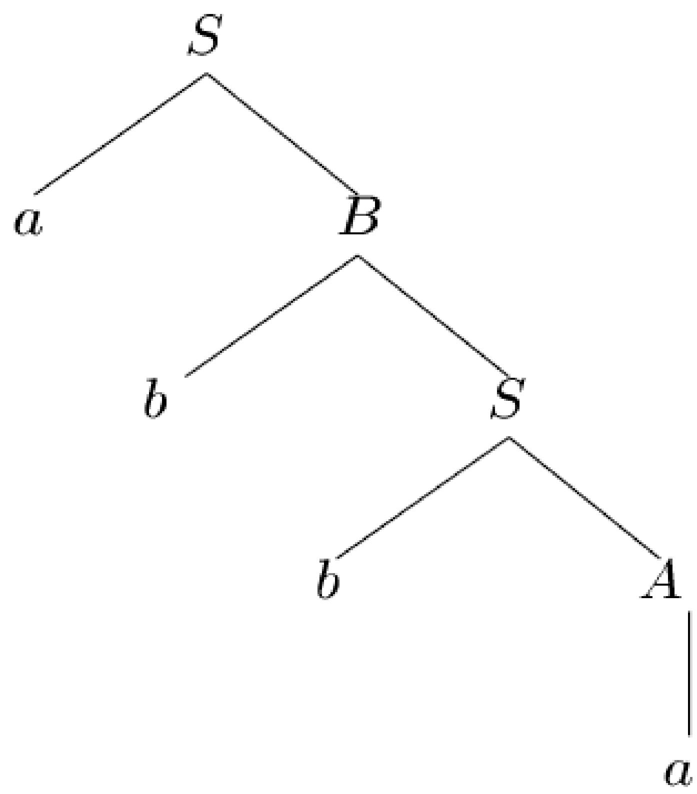
$$S \Rightarrow aB \Rightarrow abS \Rightarrow abbA \Rightarrow abba$$

Γλώσσα που παράγεται (όχι προφανές):

$$\boxed{L(G_3) = \{w \in T^+ \mid w \text{ έχει ίσο αριθμό } a \text{ και } b\}}$$

Συντακτικά Δένδρα (parse trees) (i)





Φύλλωμα (leafstring): *aaabbb* και *abba* αντίστοιχα.

Συντακτικά Δένδρα (parse trees) (ii)

Έστω $G=\{V,T,P,S\}$ μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα. Ένα δένδρο είναι συντακτικό δένδρο της G αν:

- Κάθε κόμβος του δένδρου έχει επιγραφή, που είναι σύμβολο (τερματικό ή μη τερματικό ή ε).
- Η επιγραφή της ρίζας είναι το S.
- Αν ένας εσωτερικός κόμβος έχει επιγραφή A, τότε το A είναι μη τερματικό σύμβολο. Αν τα παιδιά του, από αριστερά προς τα δεξιά, έχουν επιγραφές $X_1,X_2,\ldots,X_k$ τότε ο $A \to X_1,X_2,\ldots,X_k$ είναι κανόνας παραγωγής.
- Αν ένας κόμβος έχει επιγραφή ε, τότε είναι φύλλο και είναι το μοναδικό παιδί του γονέα του.

Συντακτικά Δένδρα (parse trees) (iii)

Θεώρημα. *Έστω* $G=\{V,T,P,S\}$ *μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα. Τότε* $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ *αν και μόνο αν υπάρχει συντακτικό δένδρο της* G *με φύλλωμα* w.

Απόδειξη:

'<=' : Με επαγωγή ως προς τον αριθμό των εσωτερικών κόμβων.

'=>' : Με επαγωγή ως προς των αριθμό των βημάτων της ακολουθίας παραγωγών (άσκηση).

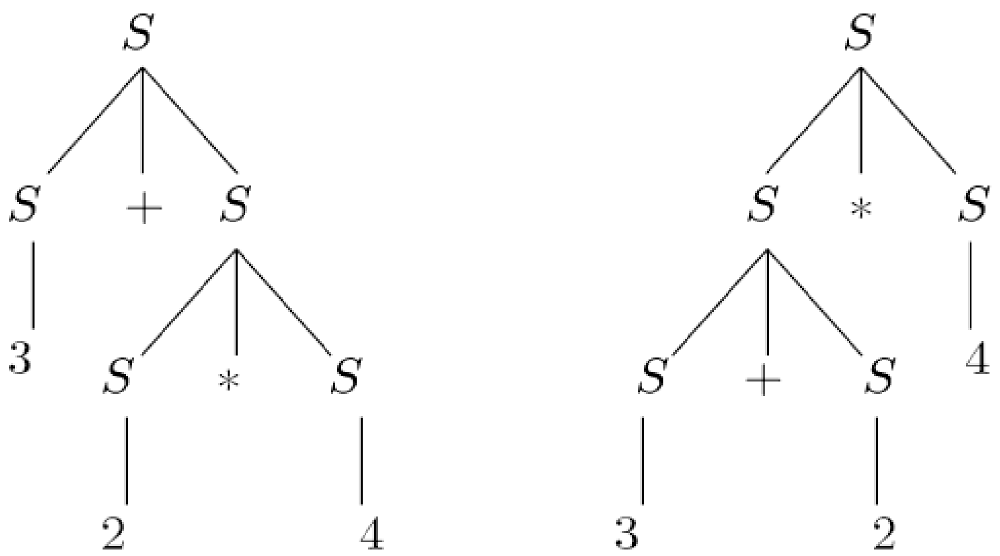
Διφορούμενες γραμματικές

Μια γραμματική G ονομάζεται διφορούμενη (ambiguous) αν υπάρχουν δύο συντακτικά δένδρα με το ίδιο φύλλωμα $w \in L(G)$

Παράδειγμα:

G_2: $T = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,+,*\}$ $V = \{S\}$

$P: \; S \rightarrow S{+}S \,/\, S{*}S \,/\, 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$



Αλγόριθμος αναγνώρισης για CF γραμματικές: CYK

- Με εξαντλητικό τρόπο μπορούμε να αποφασίσουμε αν μια συμβολοσειρά x παράγεται από μια γραμματική CF (χωρίς συμφραζόμενα) σε εκθετικό όμως χρόνο.
- Οι ιδιότητες της κανονικής μορφής Chomsky επιτρέπουν ταχύτερη αναγνώριση μιας συμβολοσειράς.
- Αλγόριθμος CYK (Cocke, Younger, Kasami): αποφασίζει αν μια συμβολοσειρά x παράγεται από μια γραμματική σε χρόνο $O(|x|^3)$, αρκεί η γραμματική να δίνεται σε Chomsky Normal Form.

Αυτόματα Στοίβας (PDA) (i)

- Έχουν ταινία εισόδου μιας κατεύθυνσης (όπως και τα FA) αλλά επιπλέον μνήμη υπό μορφή στοίβας.
- Πρόσβαση μόνο στην κορυφή της στοίβας με τις λειτουργίες:
  - push(x): τοποθετεί στοιχείο x στην κορυφή της στοίβας
  - pop: διαβάζει και αφαιρεί στοιχείο από την κορυφή της στοίβας

Αυτόματα Στοίβας (PDA) (ii)

Παράδειγμα: PDA για αναγνώριση της γλώσσας

$$L = \{wcw^R \mid w \in (0+1)^*\}$$

Περιγραφή αυτομάτου

- push(*a*) στη στοίβα για κάθε 0 στην είσοδο, push(*b*) στη στοίβα για κάθε 1 στην είσοδο, συνέχισε μέχρι να διαβαστεί *c*
- μετά pop: εφόσον πάνω στοιχείο στοίβας συμφωνεί με είσοδο (*a* με 0, *b* με 1) συνέχισε
- Αποδοχή με *κενή στοίβα*

Τυπικός ορισμός PDA

Αυτόματο στοίβας (Pushdown Automaton, PDA):
επτάδα $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$

- Q : το σύνολο των καταστάσεων του M (πεπερασμένο)
- Σ : αλφάβητο εισόδου
- Γ : αλφάβητο στοίβας
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times \Gamma \rightarrow \mathrm{Pow}(Q \times \Gamma^*)$: συνάρτηση μετάβασης (μη ντετερμινισμός, ε-κινήσεις)
- $q_0 \in Q$: αρχική κατάσταση
- $Z_0 \in \Gamma$: αρχικό σύμβολο στοίβας
- $F \subseteq Q$: σύνολο τελικών καταστάσεων

Αυτόματα Στοίβας (PDA) (iv)

Είδη αποδοχής PDA

- Αν βρεθεί σε τελική κατάσταση (δηλ. αποδοχής) μόλις διαβαστεί όλη η είσοδος, ανεξαρτήτως περιεχομένου στοίβας
- Αν βρεθεί με κενή στοίβα μόλις διαβαστεί όλη η είσοδος, ανεξαρτήτως κατάστασης

Αντίστοιχα ορίζονται οι *γλώσσες*:

- $L_f(M)$: αποδοχή με τελική κατάσταση
- $L_e(M)$: αποδοχή με κενή στοίβα

Αυτόματα Στοίβας (PDA) (v)

- Για να γίνει αποδεκτή η γλώσσα

$$\boxed{L_1 = \{ww^R \mid w \in (0+1)^*\}}$$

  χωρίς δηλαδή ειδικό μεσαίο σύμβολο *c* χρειαζόμαστε απαραίτητα μη ντετερμινιστικό PDA.

- Τα μη ντετερμινιστικά PDA είναι γνησίως πιο ισχυρά από τα ντετερμινιστικά.
- Με τον όρο PDA αναφερόμαστε συνήθως στα μη-ντετερμινιστικά PDA.

Ισοδυναμία CF γραμματικών και PDA

Θεώρημα. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για μια γλώσσα *L:*

- $L = L_f(M)$, *M* είναι PDA.
- $L = L_e(M')$, *M'* είναι PDA.
- Η *L* είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα (c.f.)

Ποιες γλώσσες είναι Context Free;

- Όλες οι κανονικές.
- Επίσης όσες σχηματίζονται από γλώσσες CF με τις πράξεις: παράθεση, ένωση, άστρο Kleene.
- Αλλά όχι απαραίτητα με τις πράξεις τομή, συμπλήρωμα:

  π.χ. η γλώσσα $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ δεν είναι CF, ενώ είναι τομή δύο CF γλωσσών:

  $$\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{a^n b^n c^m \mid n,m \in \mathbf{N}\} \cap \{a^k b^n c^n \mid k,n \in \mathbf{N}\}$$

Είναι όλες οι γλώσσες Context Free;

- Η απάντηση είναι «όχι».
- Για να το αποδείξουμε χρησιμοποιούμε ένα άλλο λήμμα άντλησης, το Pumping Lemma για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα.
- Βασίζεται στο συντακτικό δένδρο (περισσότερα στο μάθημα «Υπολογισιμότητα»).

Γενικές Γραμματικές (i)

τύπου 0: γενικές γραμματικές (general, phrase structure, semi-Thue).

$$\alpha \rightarrow \beta, \; \alpha \neq \varepsilon$$

Παράδειγμα: $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbf{N}\}$

$$\begin{aligned}
&S \rightarrow AaCB \\
&CB \rightarrow E \mid DB \\
&aE \rightarrow Ea \\
&AE \rightarrow \varepsilon \\
&aD \rightarrow Da \\
&AD \rightarrow AC \\
&Ca \rightarrow aaC
\end{aligned}$$

Γενικές Γραμματικές (ii)

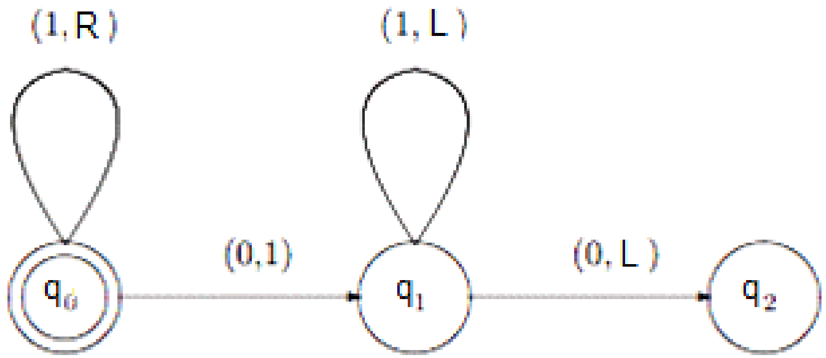
Θεώρημα. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. Η γλώσσα L γίνεται αποδεκτή από μια μηχανή Turing
2. $L=L(G)$, όπου G είναι γενική γραμματική

Μια τέτοια γλώσσα λέγεται και *αναδρομικά αριθμήσιμη* (recursively enumerable).

Μηχανές Turing

Αυτόματα με απεριόριστη ταινία. Η είσοδος είναι αρχικά γραμμένη στην ταινία, η κεφαλή μπορεί να κινείται αριστερά-δεξιά, καθώς και να αλλάζει το σύμβολο που διαβάζει. Παράδειγμα συνάρτησης μετάβασης:



$< q_0, 1, q_0, R >$

$< q_0, 0, q_1, 1 >$

$< q_1, 1, q_1, L >$

$< q_1, 0, q_2, R >$

Γραμματικές με Συμφραζόμενα (context sensitive) (i)

τύπου 1: γραμματικές με συμφραζόμενα ή μονοτονικές (context sensitive, monotonic).

$$\alpha \rightarrow \beta, \quad |\alpha| \leq |\beta| \text{ (επιτρέπεται και: } S \rightarrow \varepsilon) \quad \alpha \neq \varepsilon$$

Λέγονται «με συμφραζόμενα» γιατί μπορούν να τεθούν στην εξής κανονική μορφή:

$$\underbrace{\alpha_1 A \alpha_2}_{context} \rightarrow \alpha_1 \beta \alpha_2, \qquad \text{όπου } A\text{: μη τερματικό και } \beta \neq \varepsilon$$

Γραμματικές με Συμφραζόμενα (context sensitive) (ii)

Γραμματική c.s. για τη γλώσσα $1^n 0^n 1^n$:

$$S \to 1Z1$$
$$Z \to 0 \mid 1Z0A$$
$$A0 \to 0A$$
$$A1 \to 11$$

Μετατροπή σε κανονική μορφή:

$A0 \to H0 \qquad H0 \to HA \qquad HA \to 0A$

Άλλα παραδείγματα: $\{1^i\, 0^j\, 1^k : i <= j <= k\}$,

$\{\, ww \mid w \in \Sigma^* \,\}$, $\quad \{a^n b^n a^n b^n \mid n \in \mathbf{N}\}$

Ισοδυναμία γραμματικών CS και LBA

Γραμμικά φραγμένο αυτόματο (*Linear Bounded Automaton*, LBA):

είναι μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing που η κεφαλή της είναι περιορισμένη να κινείται μόνο στο τμήμα που περιέχει την αρχική είσοδο.

Θεώρημα. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα (L χωρίς ε):

1. Η γλώσσα L γίνεται αποδεκτή από LBA.
2. Η γλώσσα L είναι context sensitive.

Ιεραρχία κλάσεων γλωσσών

Θεώρημα Ιεραρχίας.

regular $\subsetneq$ context free $\subsetneq$ context sensitive $\subsetneq$ r.e.

(r.e. = recursiverly enumerable)

- τύπου 0 $\leftrightarrow$ TM (μηχανές Turing)
- τύπου 1 $\leftrightarrow$ LBA (γραμμικά περιορισμένα αυτόματα)
- τύπου 2 $\leftrightarrow$ PDA (pushdown automata)
- τύπου 3 $\leftrightarrow$ DFA (και NFA)