Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών

ΣΗΜΜΥ – ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

Ενότητα 4η:

Αλγοριθμικές τεχνικές, αριθμητικοί υπολογισμοί, αποδοτικότητα αλγορίθμων

Επιμέλεια διαφανειών: Στάθης Ζάχος, Άρης Παγουρτζής

Αλγόριθμος

- Webster's 50 χρόνια πριν: ανύπαρκτος όρος
- Oxford's, 1971: «erroneous refashioning of *algorism:* calculation with Arabic numerals»
- Abu Jaffar Mohammed Ibn Musa Al-Khowarizmi, محمد بن موسى الخوارزمي, 9ος αι. μ.Χ.
- Παραδείγματα:
  - Ευκλείδειος αλγόριθμος (Ευκλείδης, 3ος αι. π.Χ.) για εύρεση ΜΚΔ
  - Αριθμοί Fibonacci (Leonardo Pisano Filius Bonacci, 13ος αι. μ.Χ.)
  - Τρίγωνο Pascal (Yang Hui, 13ος αι. μ.Χ.)

Αλγόριθμος (συν.)

- Πρωταρχική έννοια. Μέθοδος επίλυσης προβλήματος δοσμένη ως πεπερασμένο σύνολο κανόνων (ενεργειών, διεργασιών) που επενεργούν σε δεδομένα (data).
- Πεπερασμένη εκτέλεση (finiteness).
- Κάθε κανόνας ορίζεται επακριβώς και η αντίστοιχη διεργασία είναι συγκεκριμένη (definiteness).
- Δέχεται μηδέν ή περισσότερα μεγέθη εισόδου (input).
- Δίνει τουλάχιστον ένα μέγεθος ως αποτέλεσμα (output).
- Μηχανιστικά αποτελεσματικός, εκτέλεση με “μολύβι και χαρτί” (effectiveness).

Αλγόριθμος Ευκλείδη

- `if a>b then GCD(a,b):= GCD(a mod b, b)`
  `else GCD(a,b):= GCD(a, b mod a)`

(a **mod** b = το υπόλοιπο της διαίρεσης a **div** b)

ΜΚΔ (172 , 54) =
ΜΚΔ (10 , 54) =
ΜΚΔ (10 , 4) =
ΜΚΔ (2 , 4) =
ΜΚΔ (2 , 0) = 2

Αλγόριθμος Ευκλείδη

- `if a>b then GCD(a,b):= GCD(a mod b, b)`
  `else GCD(a,b):= GCD(a, b mod a)`

(a **mod** b = το υπόλοιπο της διαίρεσης a **div** b)

- *Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος είναι ο καλύτερος γνωστός αλγόριθμος για ΜΚΔ!*

- Ανοιχτό ερώτημα: είναι βέλτιστος;

Τρίγωνο Pascal (Yang Hui)

				1				
			1		**1**			
		1		**2**		**1**		
	1		**3**		**3**		**1**	
1		**4**		**6**		**4**		**1**

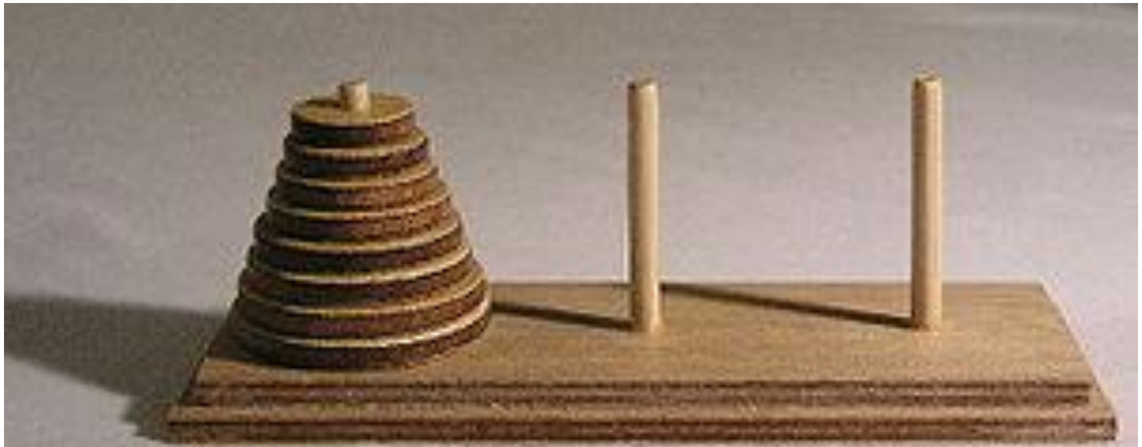
Διωνυμικοί συντελεστές / συνδυασμοί:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Αλγοριθμικές τεχνικές

- Επανάληψη (Iteration)
- Αναδρομή (Recursion)
- Επαγωγή (Induction)

Πύργοι Ανόι (Hanoi Towers)



πηγή: *wikipedia*

Πύργοι Ανόι (Hanoi Towers)

πηγή: *wikipedia*

Πύργοι Ανόι (Hanoi Towers): αναδρομή

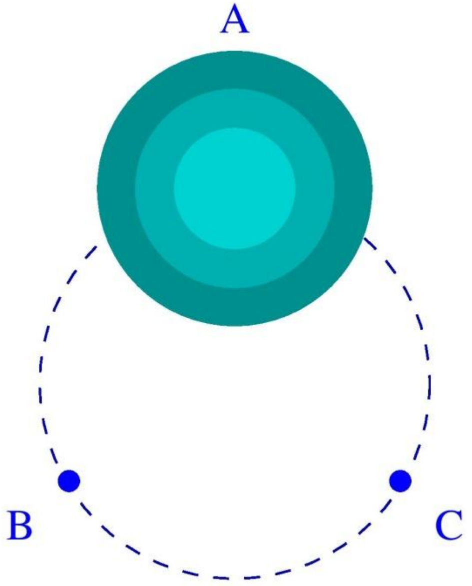
```
procedure move_anoi(n from X to Y using Z)
begin
   if n = 1 then
       move top disk from X to Y
   else
       move_anoi(n-1 from X to Z using Y);
       move top disk from X to Y;
       move_anoi(n-1 from Z to Y using X)
end
```

Πύργοι Ανόι (Hanoi Towers): αναδρομή σε Python

```
def hanoi(ndisks, startPeg, endPeg, usePeg):
   if ndisks > 0:
     hanoi(ndisks-1, startPeg, usePeg, endPeg)
     print ("Move disk", ndisks, "from peg", startPeg,
            "to peg", endPeg)
     hanoi(ndisks-1, usePeg, endPeg, startPeg)

Δοκιμάστε: hanoi(5, "X", "Y", "Z")
```

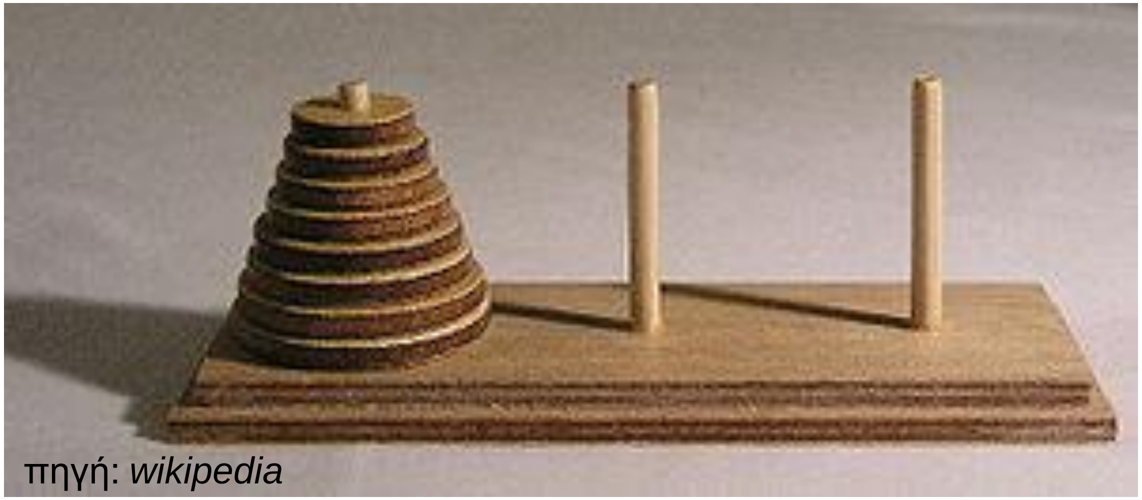
Πύργοι Ανόι (Hanoi Towers): επανάληψη

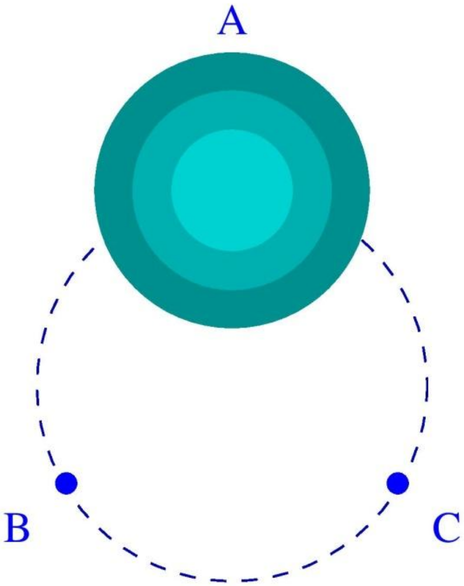


Επανάλαβε (μέχρι να επιτευχθεί η μετακίνηση):

- Μετακίνησε κατά τη θετική φορά τον μικρότερο δίσκο
- Κάνε την μοναδική επιτρεπτή κίνηση που δεν αφορά τον μικρότερο δίσκο

Πύργοι Ανόι (Hanoi Towers)





- Ποιό είναι το πλήθος κινήσεων των δύο τρόπων για *n* δίσκους;
- Γίνεται καλύτερα;

Υπολογιστικά προβλήματα

- Δίνεται ακέραιος *n*: πόσο γρήγορα μπορούμε να υπολογίσουμε:
  - το άθροισμα των αριθμών 1...*n*
  - αν ο *n* είναι πρώτος
  - τον *n*-οστό αριθμό Fibonacci

Και ένα ακόμη…

- Πόσο γρήγορα μπορούμε να υπολογίσουμε:

  το ελάχιστο πλήθος δοκιμών για να βρούμε σε ποιο ύψος σπάει ένα γυάλινο αντικείμενο

  - αν μας ενδιαφέρει ακρίβεια εκατοστού
  - αν μας ενδιαφέρει ύψος μέχρι *n* εκατοστά
  - αν διαθέτουμε 1 δοκιμαστικό αντικείμενο;
  - αν διαθέτουμε 2 δοκιμαστικά αντικείμενα;
  - αν διαθέτουμε *k* δοκιμαστικά αντικείμενα;

Αποδοτικότητα αλγορίθμου

- Μετράμε το κόστος αλγορίθμου σαν συνάρτηση των υπολογιστικών πόρων που απαιτούνται σε σχέση με το μέγεθος της (αναπαράστασης της) εισόδου στην *χειρότερη περίπτωση*:

  $\mathrm{cost}_A(n)$ = max {κόστος αλγορίθμου A για είσοδο x}

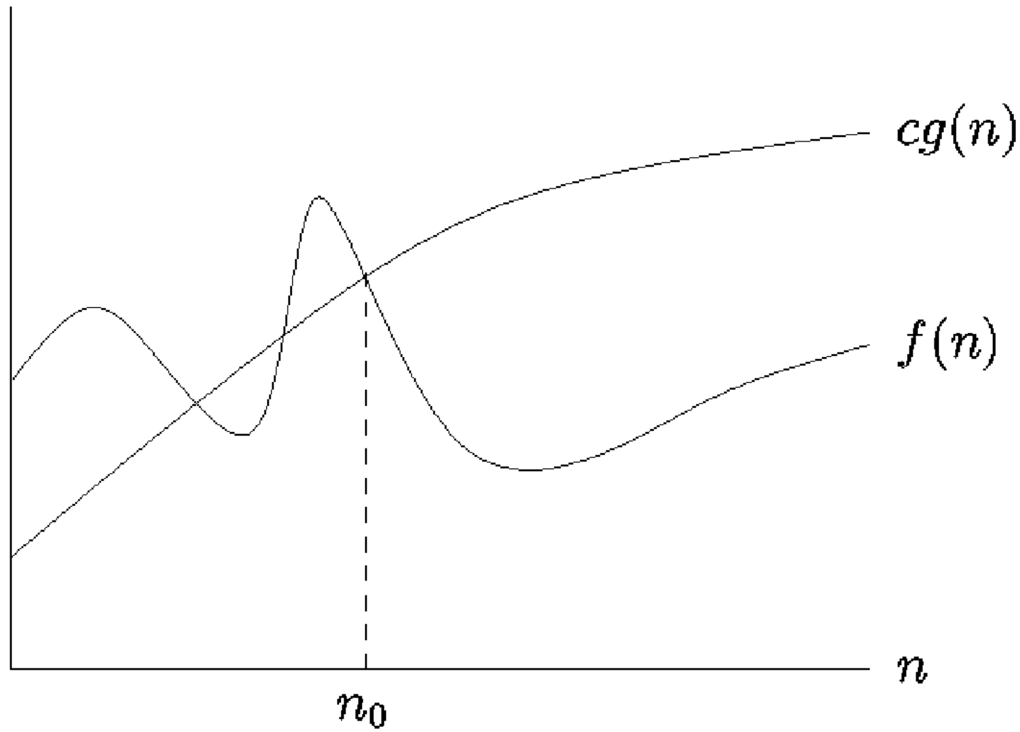
  μεταξύ όλων
  των εισόδων
  x μήκους *n*

- Παράδειγμα: time-cost$_{MS}(n) \leq c\, n\log n$
  (MS = MergeSort, *c* μία σταθερά)

Αποδοτικότητα αλγορίθμου

- Συνήθως μας ενδιαφέρει το κόστος σε χρόνο, ή αλλιώς η χρονική πολυπλοκότητα.
- Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το κόστος σε χώρο, ή αλλιώς χωρική πολυπλοκότητα.
- Παράδειγμα: $\text{space-cost}_{MS}(n) <= c' n$
  (MS = MergeSort, *c'* κάποια σταθερά)

Ασυμπτωτικός συμβολισμός (i)



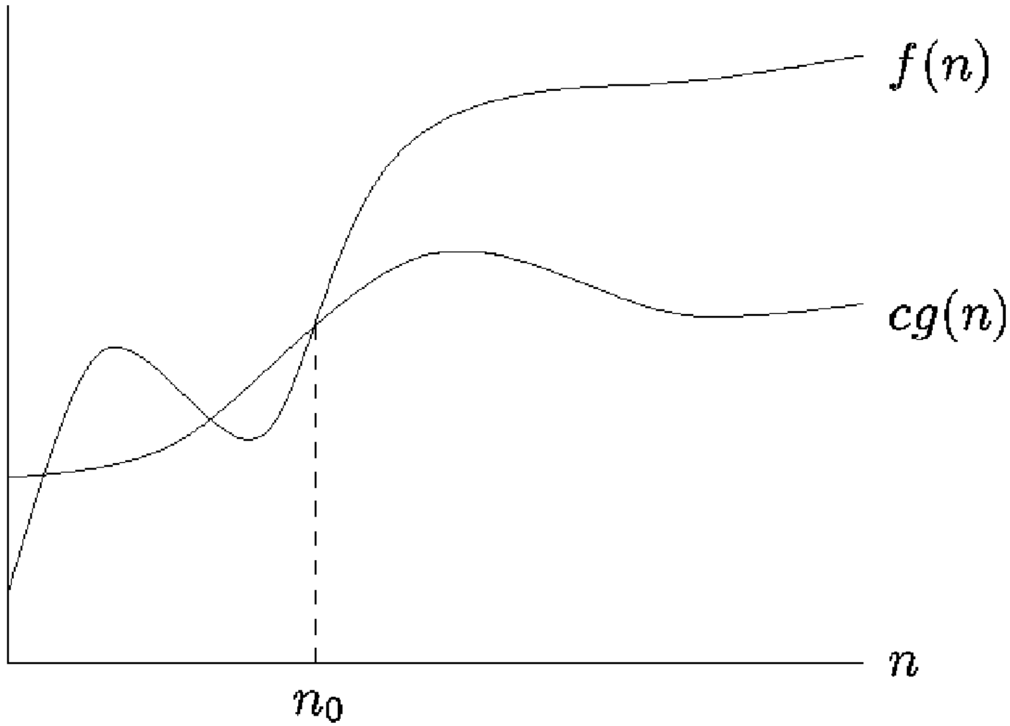
$$f = O(g)$$

$$O(g) = \{f \mid \exists c > 0,\ \exists n_0 : \forall n > n_0 \;\; f(n) \le cg(n)\}$$

Συμβολισμός Ο : παραδείγματα

- BubbleSort: $T_{BS}(n) = O(n^2)$
- InsertionSort: $T_{IS}(n) = O(n^2)$
- MergeSort: $T_{MS}(n) = O(n \log n)$

Ασυμπτωτικός συμβολισμός (ii)



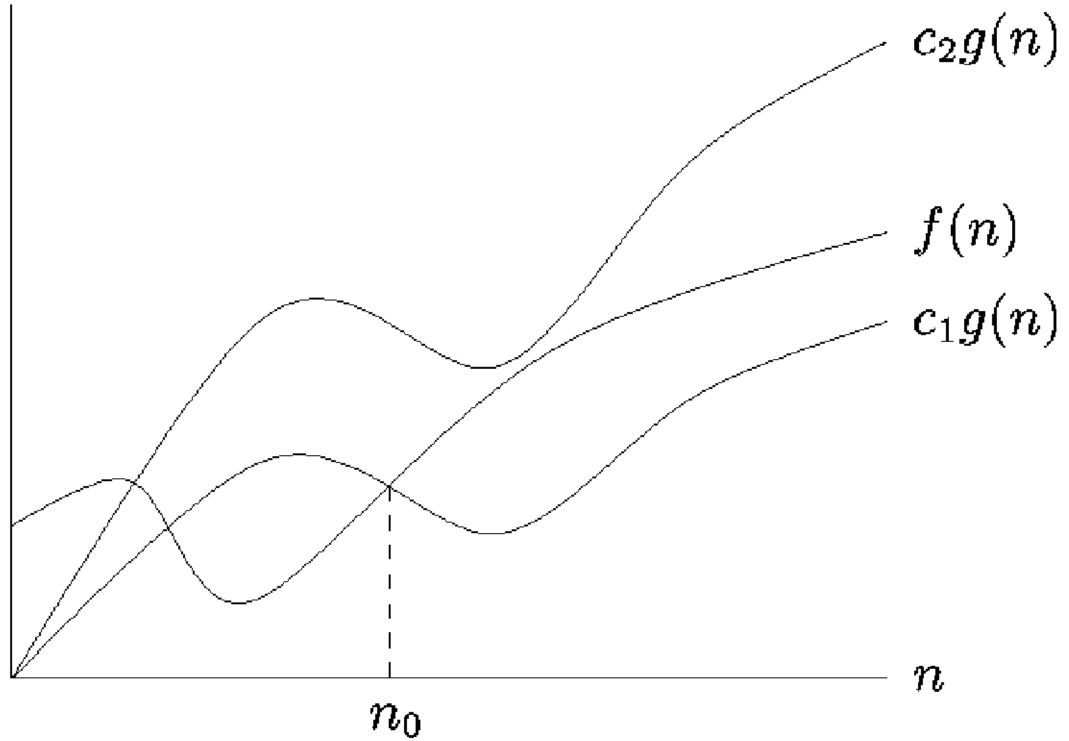
$$f = \Omega(g)$$

$$\Omega(g) = \{f \mid \exists c > 0,\ \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ f(n) \geq cg(n)\}$$

Συμβολισμός Ω : παραδείγματα

- BubbleSort: $T_{BS}(n) = \Omega(n^2)$
- InsertionSort: $T_{IS}(n) = \Omega(n^2)$
- MergeSort: $T_{MS}(n) = \Omega(n \log n)$
- <u>Προσοχή</u>: πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης

Ασυμπτωτικός συμβολισμός (iii)



$$f = \Theta(g)$$

$$\Theta(g) = \{f \mid \exists c_1 > 0,\ \exists c_2 > 0,\ \exists n_0 : \forall n > n_0\ \ c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2\}$$

Συμβολισμός Θ : παραδείγματα

- BubbleSort: $T_{BS}(n) = \Theta(n^2)$
- InsertionSort: $T_{IS}(n) = \Theta(n^2)$
- MergeSort: $T_{MS}(n) = \Theta(n \log n)$
- Προσοχή: πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης

Ασυμπτωτικός συμβολισμός : συμβάσεις και ιδιότητες

- Γράφουμε: $g(n) = O(f(n))$ αντί για $g(n) \in O(f(n))$

- $\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$

- $p(n) = \Theta(n^k)$, για κάθε πολυώνυμο p

- $O(poly) = \bigcup O(n^k)$ (για όλα τα $k \in N$)

Ασυμπτωτικός συμβολισμός : συμβάσεις και ιδιότητες

$$O(1) < O(\alpha(n)) < O(\log^* n)$$

$$< O(\log(n)) < O(\sqrt{n}) < O(n)$$

$$< O(n\log(n)) < O(n^2) < \ldots < O(poly)$$

$$< O(2^n) < O(n!) < O(n^n) < O(A(n))$$

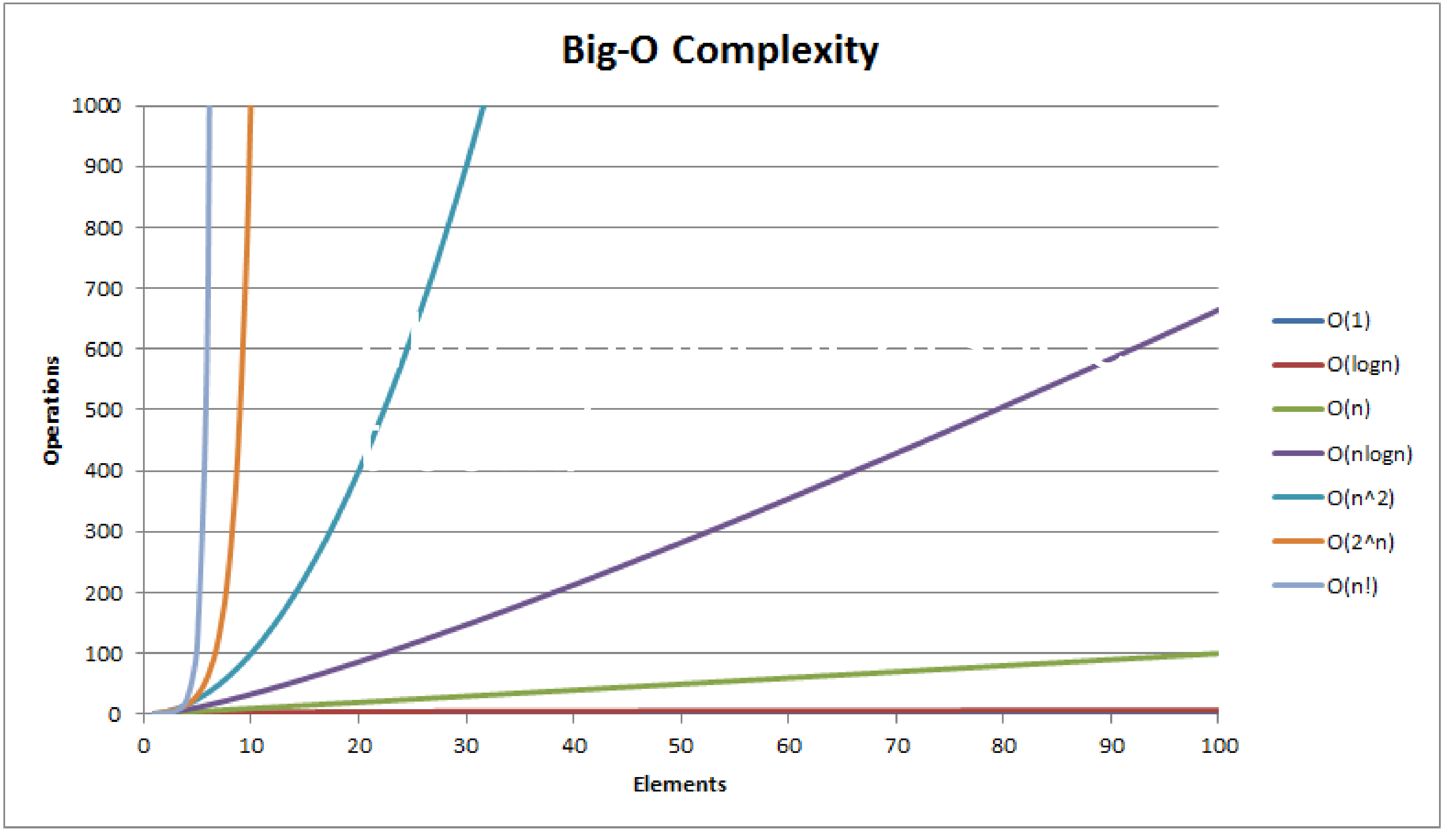
Σημείωση: γράφουμε “<” αντί “⊂”.

log**n*: πόσες φορές πρέπει να λογαριθμήσουμε το *n* για να φτάσουμε κάτω από το 1 (αντίστροφη υπερεκθετικής)

A: Ackermann.

α: αντίστροφη της A.

Γιατί ασυμπτωτικός συμβολισμός;



Source: bigocheatsheet.com/

Ασυμπτωτικός συμβολισμός: απόδειξη φραγμάτων

Θεώρημα. $\log(n!) = \Theta(n \log n)$

Απόδειξη: ασυμπτωτικά (για $n > n_0$) ισχύει:

$(n/2)^{n/2} < n! < n^n \Rightarrow$

$(1/2)\, n\, (\log n - 1) < \log(n!) < n \log n \Rightarrow$

$(1/3)\, n \log n < \log(n!) < n \log n$

Προσοχή: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κανόνα de l'Hospital, αλλά συνήθως *γίνεται απλούστερα*!

Πολυπλοκότητα αλγορίθμων: απλοποιήσεις

- Συχνά θεωρούμε ως **μέγεθος της εισόδου** το πλήθος των στοιχείων εισόδου μόνο (αγνοώντας το μέγεθός τους σε bits):
- ικανοποιητική εκτίμηση, αν τυχόν αριθμοί εισόδου είναι «μικροί» σε σχέση με υπόλοιπη είσοδο
- ή αν είναι «μεγάλοι» αλλά η τιμή τους δεν επηρεάζει ιδιαίτερα το πλήθος των στοιχειωδών πράξεων: π.χ. ταξινόμηση με συγκρίσεις

Πολυπλοκότητα αλγορίθμων: απλοποιήσεις

- Θεωρούμε ακόμη ότι κάθε στοιχειώδης αριθμητική πράξη (πρόσθεση, πολ/σμός, σύγκριση) έχει μοναδιαίο κόστος (1 βήμα):

  αυτό λέγεται **αριθμητική πολυπλοκότητα** (arithmetic complexity) και είναι συνήθως ικανοποιητική εκτίμηση

- η εκτίμηση της **πολυπλοκότητας ψηφιοπράξεων** (bit complexity) είναι απαραίτητη όταν οι αριθμοί «μεγαλώνουν» πολύ κατά τη διάρκεια εκτέλεσης: π.χ. ύψωση σε δύναμη, *n*-οστός Fibonacci

Πολυπλοκότητα προβλήματος

- Είναι η πολυπλοκότητα του βέλτιστου αλγορίθμου που λύνει το πρόβλημα.

  $\mathrm{cost}_{\Pi}(n) = \min \{\mathrm{cost}_{A}(n)\}$

  μεταξύ όλων των αλγορίθμων

  A που επιλύουν το Π

- Παράδειγμα: $\text{time-cost}_{\mathrm{SORT}}(n) = O(n \log n)$
  (SORT = πρόβλημα ταξινόμησης)

- Για να δείξουμε *βελτιστότητα αλγορίθμου* χρειάζεται και *απόδειξη αντίστοιχου κάτω φράγματος*: $\Omega(n \log n)$

Ανάλυση χρονικής πολυπλοκότητας αλγορίθμων

Μέτρηση βημάτων που θα εκτελεστούν:

- είτε με απευθείας άθροιση πλήθους βημάτων (επαναληπτικοί αλγόριθμοι)
  - Π.χ.: $T_{BS}(n) <= c\ n^2 = O(n^2)$
    (BS = BubbleSort, *c* κάποια σταθερά)
- είτε με επίλυση αναδρομικών σχέσεων (αναδρομικοί αλγόριθμοι)
  - Π.χ.: $T_{MS}(n) <= 2T_{MS}(n/2)+cn = \ldots = O(n \log n)$
    (MS = MergeSort, *c* κάποια σταθερά)

Πίνακας χρονικής πολυπλ/τας

O(1)	a := b*c;	απλές εντολές
O(log$n$)	if x<A[n/2] search(A[1,n/2])…	δυαδική αναζήτηση
O(n)	for i:=1 to n do <O(1)>	απλός βρόχος
O(n log$n$)	mergesort(A[1, n/2]) mergesort(A[n/2+1, n]) merge(A[1, n/2], A[n/2+1, n])	ταξινόμηση με συγχώνευση
O(n^2)	for i:=1 to n do for j:=1 to n do <O(1)>	διπλός βρόχος
O(2^n)	for all S $\subseteq$ $\{0,1\}^n$ do <O(1)>	υποσύνολα
O(n!)	for all σ in S[n] do <O(1)>	μεταθέσεις

Αριθμητικοί υπολογισμοί

- Εύρεση ΜΚΔ (Ευκλείδειος αλγόριθμος)
- Ύψωση σε δύναμη
- Αριθμοί Fibonacci
- Πολλαπλασιασμός ακεραίων
- Divide-and-Conquer
- Επίλυση αναδρομών: master theorem

Εύρεση Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη (gcd)

Δεν είναι λογικό να ανάγεται στο πρόβλημα εύρεσης πρώτων παραγόντων γιατί αυτό δεν λύνεται αποδοτικά.

Απλός αλγόριθμος: $O(\min(a,b))$

$z := \min(a,b)$

while $(a \bmod z \neq 0)$ **and** $(b \bmod z \neq 0)$ **do** $z := z$-1

Αλγόριθμος με αφαιρέσεις: $O(\max(a,b))$

$i := a$; $j := b$

while $(i \neq j)$ **do** **if** $i > j$ **then** $i := i - j$ **else** $j := j - i$

return i

Αλγόριθμος του Ευκλείδη: $O(\log(a+b))$

$i := a$; $j := b$

while $(i > 0)$ **and** $(j > 0)$ **do**

  if $i > j$ **then** $i := i$ **mod** j **else** $j := j$ **mod** i

return $i + j$

Εύρεση Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη (gcd): υλοποίηση με αναδρομή

Αλγόριθμος με αφαιρέσεις: $O(\max(a,b))$

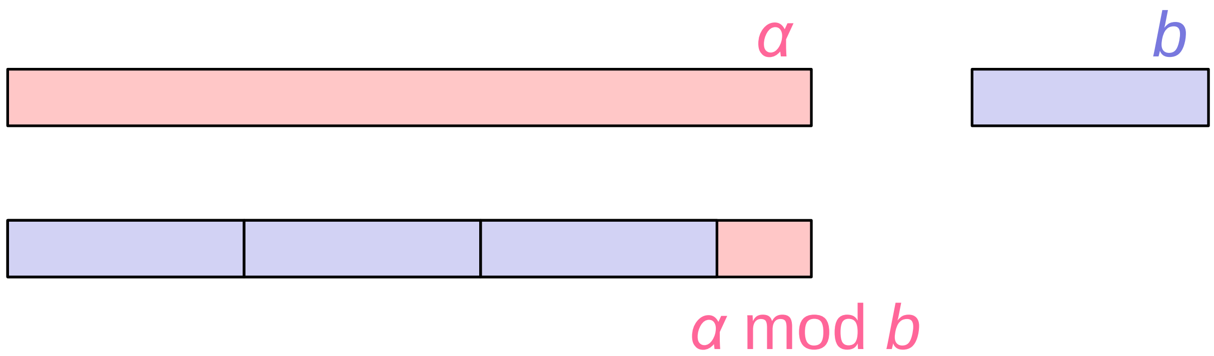
```
if a=b then GCD(a,b):=a
else if a>b then GCD(a,b):= GCD(a-b,b)
            else GCD(a,b):= GCD(a,b-a)
```

Αλγόριθμος του Ευκλείδη: $O(\log(a+b))$

```
if b=0 then GCD(a,b):= a
       else GCD(a,b):= GCD(b, a mod b)
```

Πολυπλοκότητα Ευκλείδειου

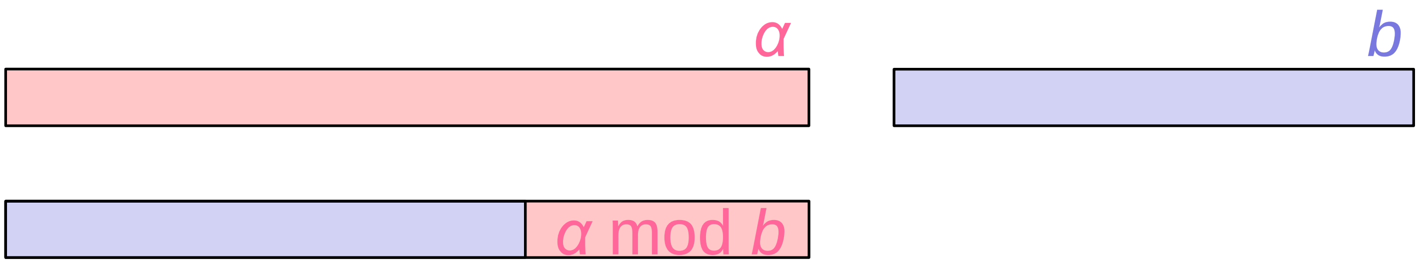
- O(log max(α,b)): σε κάθε 2 επαναλήψεις το πολύ ο μεγαλύτερος αριθμός υποδιπλασιάζεται:
  - Περίπτ. 1. αρχικά: **(α, b)**, $b \leq \alpha/2$



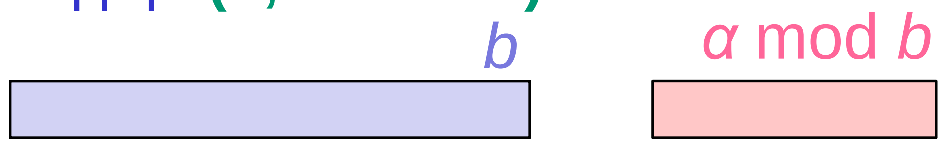
  - σε 1 επανάληψη: **(b, α mod b)**

Πολυπλοκότητα Ευκλείδειου

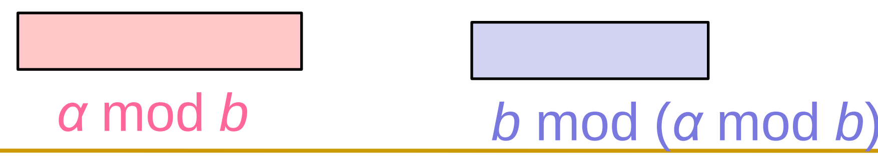
- O(log max(*α*,*b*)): σε κάθε 2 επαναλήψεις το πολύ ο μεγαλύτερος αριθμός υποδιπλασιάζεται:
  - <u>Περίπτ. 2</u>. αρχικά: **(*α*, *b*)**,   *b* > *α*/2



  - σε 1 επανάληψη: **(*b*, *α* mod *b*)**



  - σε 2 επαναλήψεις: **(*α* mod *b*, *b* mod (*α* mod *b*))**



Πολυπλοκότητα Ευκλείδειου Αλγόριθμου

- $O(\log \max(\alpha, b))$: σε κάθε 2 επαναλήψεις το πολύ ο μεγαλύτερος αριθμός υποδιπλασιάζεται

- $\Omega(\log \max(\alpha, b))$: για ζεύγη διαδοχικών αριθμών Fibonacci F_{k-1}, F_k, ο αλγόριθμος κάνει k επαναλήψεις (γιατί;), και $k = \Theta(\log F_k)$, αφού $F_k \approx \varphi^k/\sqrt{5}$,
  ($\varphi = (1+\sqrt{5})/2$: *χρυσή τομή*)

- Άρα η πολυπλοκότητα του Ευκλείδειου είναι $\Theta(\log \max(\alpha, b)) = \Theta(\log (\alpha + b))$

- Bit complexity: $O(\log^3(\alpha+b))$

Ύψωση σε δύναμη

```
power(a, n)
    result := 1;
    for i := 1 to n do
        result := result*a;
    return result
```

Πολυπλοκότητα: $O(n)$ – εκθετική! (γιατί;)

Ύψωση σε δύναμη

```
power(a, n)
    result := 1;
    for i := 1 to n do
        result := result*a;
    return result
```

Πολυπλοκότητα: $O(n)$ – εκθετική! (γιατί;)

ως προς το μήκος της εισόδου: $O(2^{||n||})$

… με επαναλαμβανόμενο τετραγωνισμό (Gauss)

```
fastpower(a, n)
    result := 1;
    while n>0 do
        if odd(n) then result:=result*a;
        n := n div 2;
        a := a*a
    return result
```

Ιδέα: $a^{13} = a^{8+4+1} = a^8\, a^4\, a^1 = a^{1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0}$

Πολυπλοκότητα: $O(\log n)$ - πολυωνυμική

ως προς το μήκος της εισόδου: $O(||n||)$

Παράδειγμα σε Python

```
def fastpower(a,n):
  res=1
  while (n>0):
    if (n%2==1):
      res=res*a
    print (n, a, res)
    n=n//2
    a=a*a
  return res
```

Εκτέλεση: `print (fastpower(15, 507))`

Παράδειγμα σε Python: εκτέλεση

```
Python 3.5.2 (default, Dec 2015, 13:05:11) [GCC 4.8.2] on
linux

15 ^ 507 computation
---------------------------
n a res
---------------------------
507 15 15
253 225 3375
126 50625 3375
63 2562890625 8649755859375
31 6568408355712890625 56815128661595284938812255859375
15 43143988327398919500410556793212890625
245123124779553476933979997334084321991554134001489728689193
7255859375
7
186140372879473421546741060475570282012336420507381262723356
4853668212890625
456273098478477754404871005449560512605808364897244527162041
372045715025563297070224521967231717463114783889244208126001
```

Παράδειγμα σε Python: εκτέλεση

```
4674626290798187255859375
1
1200500425311840942998747160518897795777662428779997749266215
1166673905456039366611628890194329797002534475422625716662493
7808359064757447892755473928062711328282864028330039243822
3121848010248090268181852124758253029985895834594050147665410
4463175029533645297476207591813590624951757490634918212890625
1897878217183751103607622393509541299667313762018054067726024
4227262330564777508933267074351479907938348440561005257295948
9905303006182040948649980490955066029181857035802223386098036
0599193304824836577201458598249047543991816297099995300858879
4689441643678571207091531932799870310825421160735980583117752
6935506324973606577448389957910588756698435943358452701472306
9660017836489965714178194111718534497473204978422385982036751
3309038964016083378716053077193611265584918100070405032947198
0267281185338842889154689834276189225020172717011238228371563
4750378628559097649031173205003142356872558593755
```

Παράδειγμα σε Python: εκτέλεση

```
15 ^ 507 =
189787821718375110360762239350954129966731376201805406772602
442272623305647775089332670743514799079383484405610052572959
489905303006182040948649980490955066029181857035802223386098
036059919330482483657720145859824904754399181629709999530085
887946894416436785712070915319327998703108254211607359805831
177526935506324973606577448389957910588756698435943358452701
472306966001783648996571417819411171853449747320497842238598
203675133090389640160833787160530771936112655849181000704050
329471980267281185338842889154689834276189225020172717011238
2283715634750378628559097649031173205003142356872558593 75
```

Bit complexity για a^n;

- ‘Αφελής’ αλγόριθμος: $O(n^2 \,||a||^2) = O(4^{||n||} \,||a||^2)$

  i-οστή επανάληψη: $O((i\text{-}1) \,||a||^2)$

  $||a||$ = μήκος του αριθμού a σε bits
- Αλγόριθμος τετραγωνισμού: $O(n^2 \,||a||^2)$ επίσης!

  (γιατί;)
- Τετραγωνισμός με πολλ/σμό Gauss-Karatsuba: $O(n^{\log 3} \,||a||^{\log 3}) = O(3.18^{||n||} \,||a||^{1.59})$ $[\pi\rho o\sigma\varepsilon\chi\acute{\omega}\varsigma!]$
- Περαιτέρω βελτιώσεις (Schönhage–Strassen): $O(n \,||a|| \log n \log\log n) = O(2^{||n||} \,||a|| \,||n|| \log(||n||))$

Modular exponentiantion a^n mod p

```
fastmodpower(a,n,p)
    result := 1;
    while n>0 do
        if odd(n) then res:=res*a mod p;
        n := n div 2;
        a := a*a mod p
    return res
```

Arithmetic complexity: $O(\log n) = O(||n||)$

Bit complexity: $O(\log n \log^2 p)$ - πολυωνυμική

ως προς το μήκος της εισόδου: $O(||n|| \cdot ||p||^2)$

Παράδειγμα σε Python

```
def fastmodpower(a,n,p):
  res=1
  while (n>0):
    if (n%2==1):
      res=res*a % p
    print (n, a, res)
    n=n//2
    a=a*a % p
  return res
```

Εκτέλεση: `print (fastmodpower(15,126,127))`

(Fermat primality test: $a^{n-1} \bmod n =? 1$)

Παράδειγμα σε Python: εκτέλεση εκτέλεσης

```
Python 3.5.2 (default, Dec 2015, 13:05:11)
[GCC 4.8.2] on linux

126 15 1
63 98 98
31 79 122
15 18 37
7 70 50
3 74 17
1 15 1
1
```

Αριθμοί Fibonacci

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n >= 2$$

- Πρόβλημα: Δίνεται n, να υπολογιστεί το F_n
- Πόσο γρήγορο μπορεί να είναι το πρόγραμμά μας;

Αριθμοί Fibonacci – αναδρομικός αλγόριθμος

```
Fib1(n)
   if (n<2) then return n
   else return Fib1(n-1)+Fib1(n-2)
```

- Πολυπλοκότητα: $T(n) = T(n\text{-}1) + T(n\text{-}2) + c$, δηλ. η T($n$) ορίζεται όπως η F($n$) (συν μια σταθερά), οπότε:

$$T(n) = c' \cdot F(n) = \Omega(1.618^{n}) = \Omega(1.618^{2^{\|n\|}})$$

Αριθμοί Fibonacci – καλύτερος αλγόριθμος

```
Fib2(n)
   a:=0; b:=1;
   for i:=2 to n do
      c:=b; b:=a+b; a:=c;
   return b
```

- Πολυπλοκότητα: $O(n)$
- Είναι πολυωνυμική;

Αριθμοί Fibonacci – καλύτερος αλγόριθμος

```
Fib2(n)
   a:=0; b:=1;
   for i:=2 to n do
      c:=b; b:=a+b; a:=c;
   return b
```

- Πολυπλοκότητα: $O(n)$
- Είναι πολυωνυμική; **Όχι!** : $O(2^{||n||})$

Αριθμοί Fibonacci – ακόμα καλύτερος αλγόριθμος

Μπορούμε να γράψουμε τον υπολογισμό σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(n-1) \\ F(n-2) \end{bmatrix}$$

Από αυτό συμπεραίνουμε:

$$\begin{bmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

… και το πλήθος των αριθμητικών πράξεων (*αριθμητική πολυπλοκότητα*) μειώνεται σε O(log *n*) = O(||*n*||)

Αριθμοί Fibonacci – ακόμα καλύτερος αλγόριθμος

$$\begin{bmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

***Άσκηση*:** βρείτε την *πολυπλοκότητα ψηφιοπράξεων (bit complexity)* του παραπάνω αλγορίθμου. Συγκρίνετε με τον επαναληπτικό αλγόριθμο.

Σημαντική αλγοριθμική τεχνική

Ποια ιδέα είναι κοινή και στους 3 προηγούμενους αλγόριθμους (Ευκλείδη, Repeated Squaring, Fibonacci με πίνακα);

Divide-and-Conquer !

(Διαίρει-και-Κυρίευε)

Divide-and-Conquer

- Χρόνος εκτέλεσης αλγόριθμων «διαίρει-και-κυρίευε» με διατύπωση και λύση αναδρομικής εξίσωσης λειτουργίας.
- **MergeSort**
  - **$T(n)$** : χρόνος για ταξινόμηση n στοιχείων.
    - **$T(n / 2)$** : ταξινόμηση αριστερού τμήματος ($n / 2$ στοιχεία).
    - **$T(n / 2)$** : ταξινόμηση δεξιού τμήματος ($n / 2$ στοιχεία).
    - **$O(n)$** : συγχώνευση ταξινομημένων τμημάτων.

$$T(n) = 2\,T(n / 2) + O(n),\ T(1) = O(1)$$

  - Χρόνος εκτέλεσης MergeSort: **$T(n) = ?$**

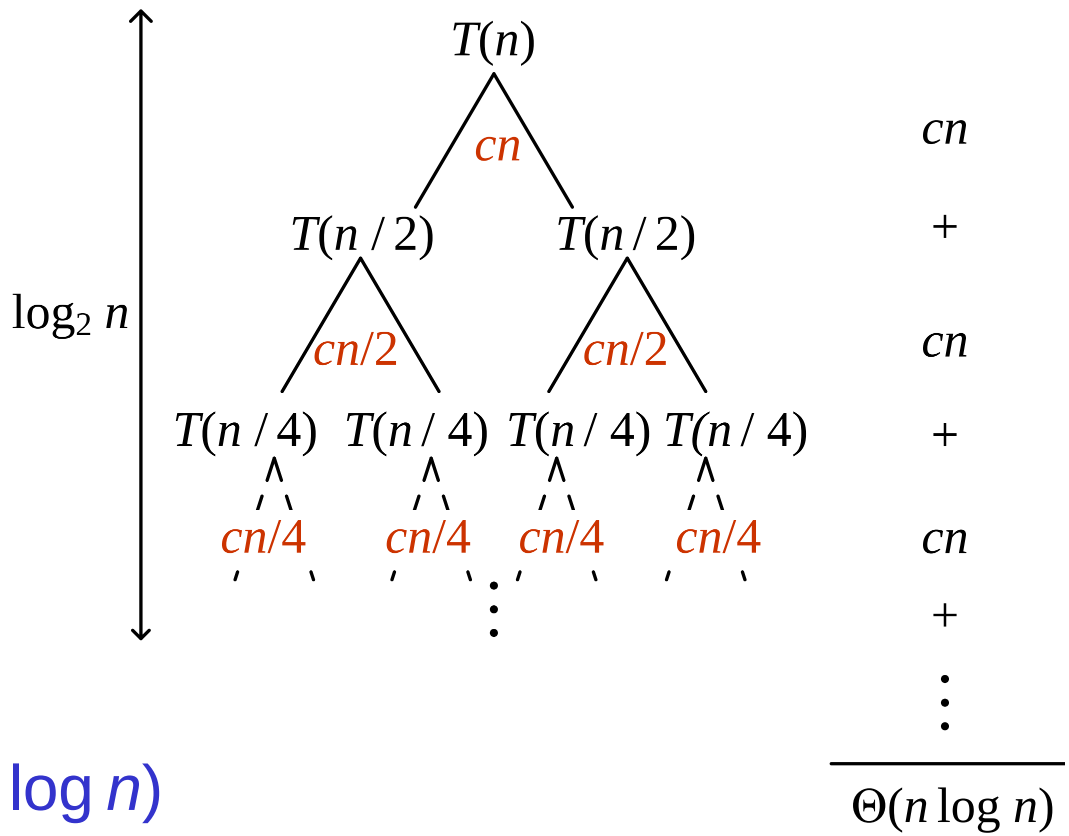
Δέντρο Αναδρομής

$T(n) = 2\,T(n/2) + O(n)$,
$T(1) = O(1)$

Δέντρο αναδρομής :

Ύψος : $O(\log n)$
#κορυφών : $O(n)$

Χρόνος / επίπεδο : $O(n)$



Συνολικός χρόνος : $O(n \log n)$

Πολλαπλασιασμός Ακεραίων

$$X : \boxed{\;a\;}\boxed{\;b\;} \quad = a \cdot 2^{\frac{n}{2}} + b$$

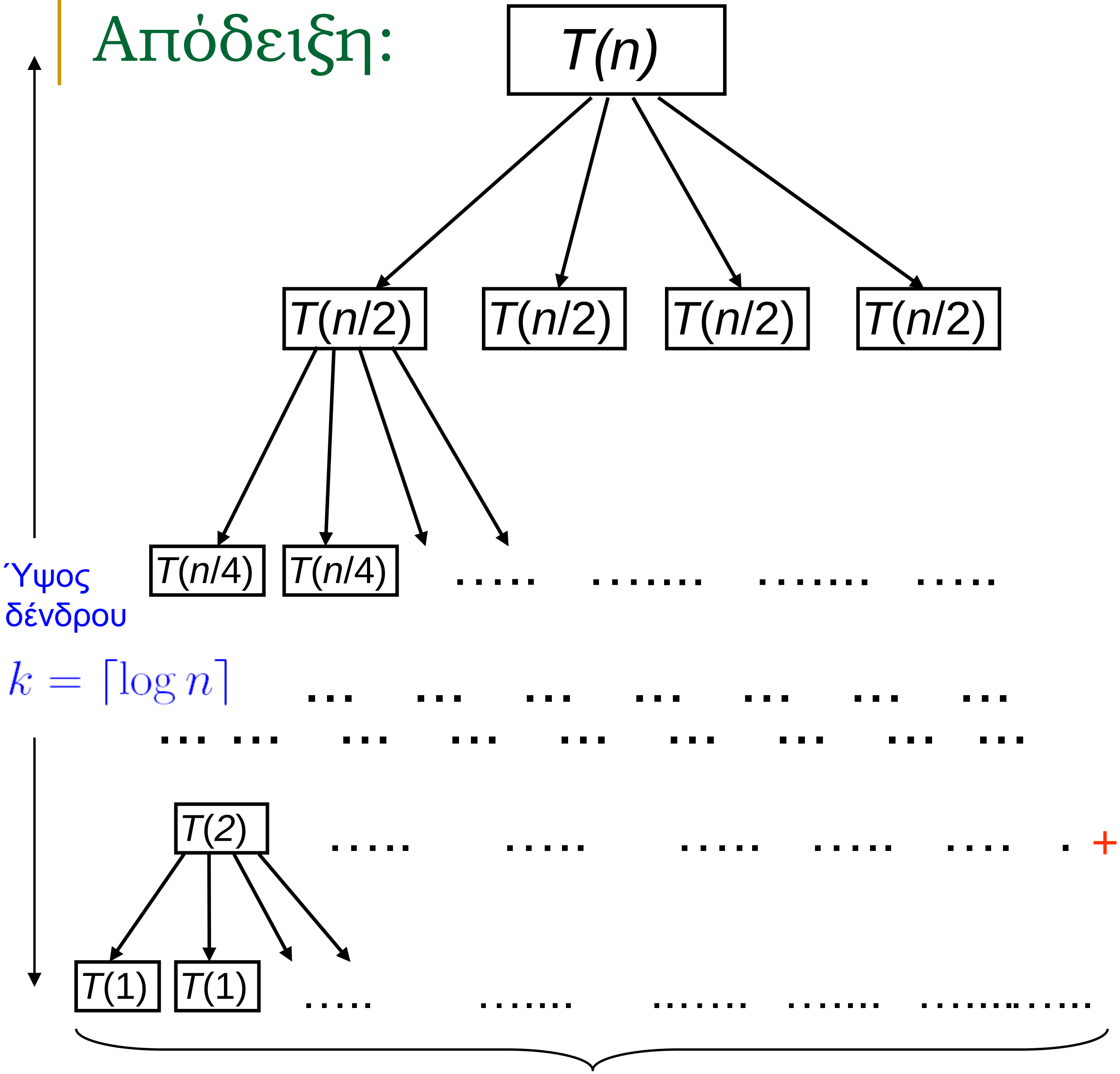
$$Y : \boxed{\;c\;}\boxed{\;d\;} \quad = c \cdot 2^{\frac{n}{2}} + d$$

$$X\,Y = ac \cdot 2^{n} + (ad + bc) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + bd$$

Πολυπλοκότητα Πολλαπλασιασμού

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{, για } n = 1 \\ 4T(\frac{n}{2}) + cn & \text{, για } n > 1 \end{cases}$$

Απόδειξη:



$+ cn$

$+ 4\, cn/2$

$+ 16\, cn/4$

.

.

.

$+ 4^{(k-1)}\, cn/2^{(k-1)}$

Χρον. πολ/τα $<(4/2)^k cn$ $\leq 2^{(\log n+1)} cn$ $= O(n^2)$

$\boxed{\textit{Συνολικά: } O(n^2)}$

4^k ‘φύλλα’, χρονική πολυπλ/τα $\alpha \cdot 4^k = O(n^2)$

Πολυπλοκότητα Πολλαπλασιασμού

$$T(n) = \begin{cases} a & ,\ \text{για}\ n = 1 \\ 4T(\frac{n}{2}) + cn & ,\ \text{για}\ n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = O(n^2)$$

Βελτιωμένος Πολλαπλασιασμός (Gauss-Karatsuba)

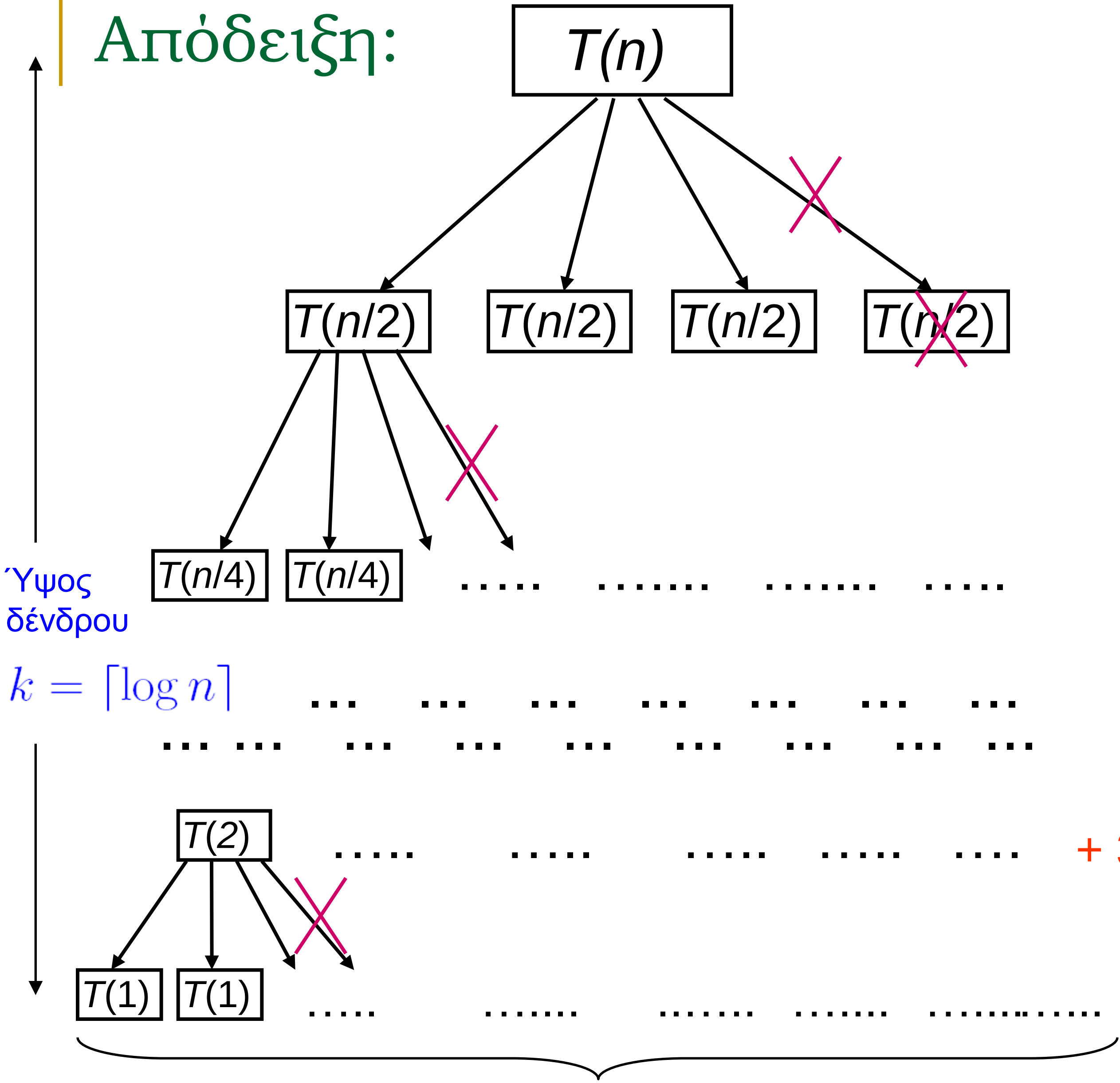
$$(ad + bc) \;=\; [(a-b)(d-c) + ac + bd]$$

$$X\;Y = ac \cdot 2^n + [(a-b)(d-c) + ac + bd]\,2^{\frac{n}{2}} + bd$$

Πολυπλοκότητα Βελτίωσης

$$T(n) = \begin{cases} a & , \text{για } n = 1 \\ 3T(\frac{n}{2}) + cn & , \text{για } n > 1 \end{cases}$$

Απόδειξη:



$+ cn$

$+ 3\ c\ n/2$

$+ 9\ c\ n/4$

.

.

.

$+ 3^{(k-1)}\ c\ n/2^{(k-1)}$

Χρον. πολ/τα

$< 2 \cdot (3/2)^k\ cn$

$\leq 3 \cdot (3/2)^{(\log n)}\ cn$

$= O(n^{\log 3})$

Συνολικά: $O(n^{\log 3})$

3^k 'φύλλα', χρονική πολυπλ/τα $\alpha \cdot 3^k = O(3^{\log n}) = O(n^{\log 3})$

Πολυπλοκότητα Βελτίωσης

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{, για } n = 1 \\ 3T(\frac{n}{2}) + cn & \text{, για } n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) \; = \; O(n^{\log_2 3}) \; = \; O(n^{1.59})$$

Master Theorem (απλή μορφή)

Αν $T(n) = aT(n/b) + O(n)$,

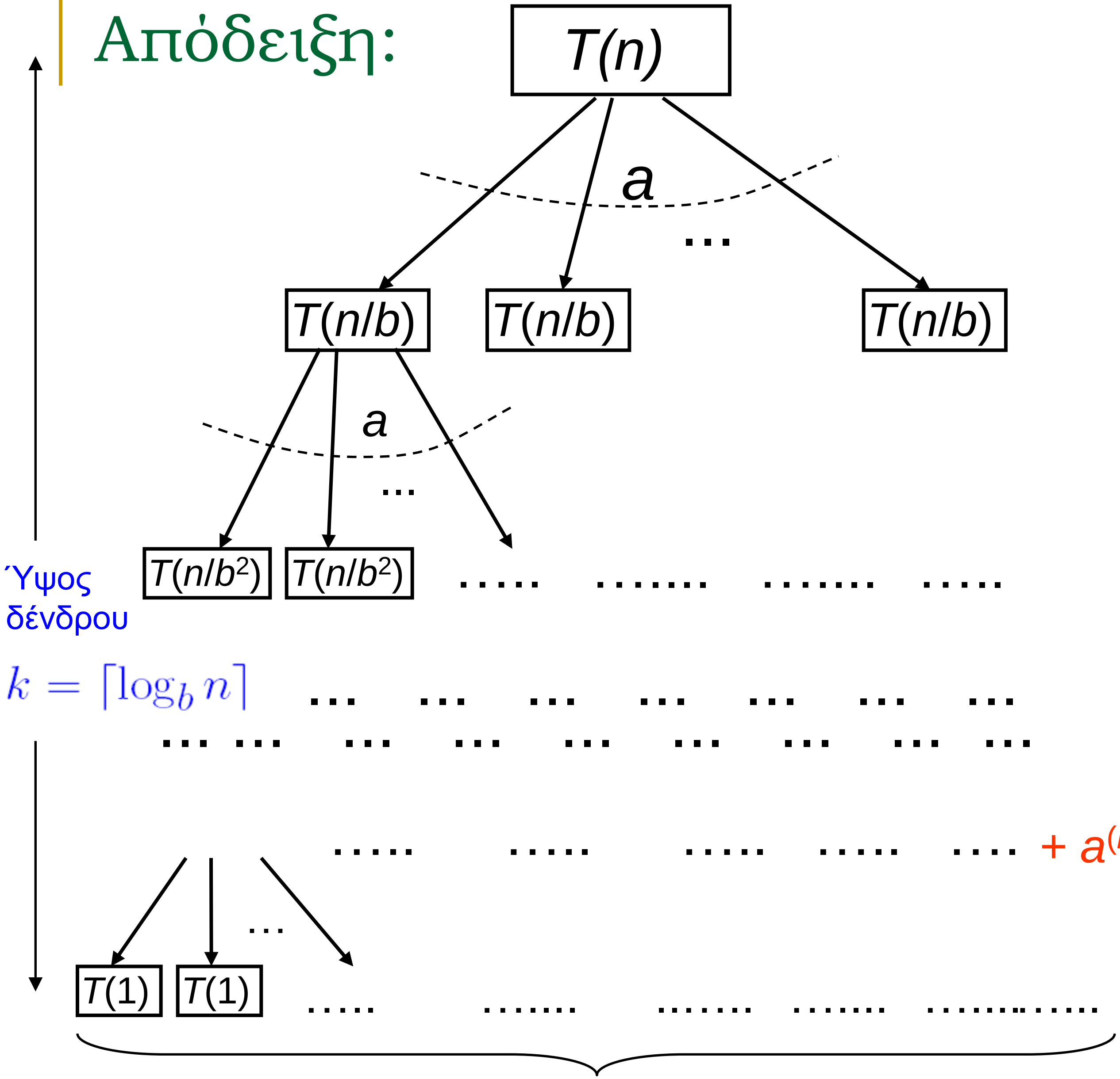
για θετικούς ακέραιους a, b

και $T(1) = O(1)$

τότε:

$$T(n) = \begin{cases} O(n), & \text{αν } a<b \\ O(n \log n), & \text{αν } a=b \\ O(n^{\log_b a}), & \text{αν } a>b \end{cases}$$

Απόδειξη:



$+\ cn$

$+\ a\ c\ n/b$

$+\ a^2\ c\ n/b^2$

.

.

.

$+\ a^{(k-1)}\ c\ n/b^{(k-1)}$

Χρον. πολ/τα $\leq cn\, \Sigma_0^{k-1} (a/b)^i$

=

$$\begin{cases} \mathbf{O(n)}, & \text{αν } a<b \\ \mathbf{O(n \log n)}, & \text{αν } a=b \\ \mathbf{O(n^{\log_b a})}, & \text{αν } a>b \end{cases}$$

a^k ‘φύλλα’, χρονική πολυπλ/τα $c'{\cdot}a^k = O(a^{\log_b n}) = O(n^{\log_b a}) \leq$

Master Theorem (γενική μορφή)

Αν $T(n) = aT(n/b) + O(n^d)$,

για θετικούς ακέραιους a, b, d

και $T(1) = O(1)$

τότε:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d), & \text{αν } a<b^d \\ O(n^d \log n), & \text{αν } a=b^d \\ O(n^{\log_b a}), & \text{αν } a>b^d \end{cases}$$

Master Theorem: εφαρμογή

Αν $T(n) = aT(n/b) + O(n^d)$, για θετικούς ακέραιους a, b, d

και $T(1) = O(1)$ τότε:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d), & \text{αν } a<b^d \\ O(n^d \log n), & \text{αν } a=b^d \\ O(n^{\log_b a}), & \text{αν } a>b^d \end{cases}$$

Matrix Multiplication

- 'Standard' divide-and-conquer: $T(n) = 8T(n/2) + O(n^2)$

  $\Rightarrow \mathrm{T}(n) = \mathrm{O}(n^3)$

- Strassen's algorithm: $T(n) = 7T(n/2) + O(n^2)$

  $\Rightarrow \mathrm{T}(n) = \mathrm{O}(n^{\log 7})$

Αλγόριθμοι divide & conquer

$O(\log n)$	if x<A[n/2] search(A[1,*n*/2])…	δυαδική αναζήτηση
$O(\|\|a\|\|+\|\|b\|\|)$ *	GCD(*a*,*b*) := GCD(*b*, *a* **mod** *b*)	εύρεση ΜΚΔ
$O(\|\|n\|\|)$ *	pow(*a*,*n*) := pow(a^2,*n*/2)	ύψωση σε δύναμη
$O(\|\|n\|\|)$ *	αλγόριθμος πίνακα fast doubling	υπολογισμός *n*-οστού αριθμού Fibonacci
$O(n \log n)$	mergesort(A[1, *n*/2]) mergesort(A[*n*/2+1, n]) merge(A[1, *n*/2], A[*n*/2+1, n])	ταξινόμηση με συγχώνευση
$O(n^{\log 3})$	αλγόριθμος Gauss-Karatsuba	πολλαπλασιασμός *n*-ψήφιων αριθμών
$O(n^{\log 7})$	αλγόριθμος Strassen	πολλαπλασιασμός πινάκων *n* x *n*

* αριθμητική πολυπλοκότητα, $\|\|x\|\|$ = #ψηφίων του $x = O(\log x)$