



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών 2021-22

1η σειρά γραπτών ασκήσεων (ημιτελής)
(αυτόματα – τυπικές γλώσσες – γραμματικές)

Άσκηση 1.

Κατασκευάστε DFA, κανονικές παραστάσεις και κανονικές γραμματικές για κάθε μία από τις παρακάτω γλώσσες:

- (α) Σύνολο συμβολοσειρών του $\Sigma_1 = \{x, y\}$ των οποίων το πλήθος των $'x'$ είναι πολλαπλάσιο του 4.
(β) Σύνολο συμβολοσειρών του $\Sigma_2 = \{a, b\}$ που δεν περιέχουν δύο συνεχόμενα $'ab'$.

Άσκηση 2.

Σχεδιάστε δύο DFA με αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ που να διαβάζουν τα ψηφία ενός ακεραίου αριθμού n (τα περισσότερα σημαντικά πρώτα, τα λιγότερα σημαντικά τελευταία) δοσμένου σε τριαδικό σύστημα και να αποδέχονται ως εξής:

- (α) το πρώτο εάν $n \bmod 3 = 2$,
(β) το δεύτερο εάν $n \bmod 5 = 0$.

Δώστε επίσης τις αντίστοιχες κανονικές παραστάσεις.

Σημείωση: Μπορεί να υπάρχουν αρχικά μηδενικά στον αριθμό εισόδου. Για παράδειγμα, η είσοδος 00202 θα πρέπει να γίνεται αποδεκτή από και από τα δύο αυτόματα ενώ η 120 να γίνεται αποδεκτή μόνο από το δεύτερο.

Άσκηση 3.

Δίνονται οι παρακάτω γλώσσες:

$$L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \eta \ w \ \text{περιέχει} \ \text{την} \ \text{συμβολοσειρά} \ 'cab' \ \text{αλλά} \ \text{όχι} \ \text{τη} \ \text{συμβολοσειρά} \ 'acab'\}.$$

$$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \eta \ w \ \text{είναι} \ \text{δυαδική} \ \text{αναπαράσταση} \ \text{ακεραίου} \ \text{με} \ \text{τιμή} \ 4^k, \ \text{για} \ k \geq 1\}$$

Κατασκευάστε DFA με όσο το δυνατόν λιγότερες καταστάσεις για τις γλώσσες L_1 και L_2 . Αποδείξτε την ελαχιστότητα του αυτομάτου σας.

Υπόδειξη: *θυμηθείτε ότι μπορείτε να σχεδιάσετε και να συνδυάσετε αυτόματα για απλούστερες γλώσσες (με τουλάχιστον δύο τρόπους).*

Άσκηση 4.

Είναι κανονικές οι παρακάτω γλώσσες; Αν μια γλώσσα δεν είναι κανονική, να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας είτε το Λήμμα Άντλησης είτε κάποια ιδιότητα κλειστότητας είτε συνδυασμό τους. Αν μια γλώσσα είναι κανονική, να το αιτιολογήσετε κατάλληλα.

- (α) $\{w \in \{0, 1\}^* : \text{το} \ \text{πλήθος} \ \text{των} \ 0 \ \text{στην} \ w \ \text{δεν} \ \text{είναι} \ \text{διπλάσιο} \ \text{από} \ \text{το} \ \text{πλήθος} \ \text{των} \ 1\}$.
(β) $\{0^n 1^+ 0^m : n, m \geq 1, n \leq 2m\}$.
(γ) $\{0^n 1^+ 0^m : n, m \in \mathbb{N}\}$.

Σημείωση: 1^+ είναι η συμβολοσειρά 11^* , και 0^+ είναι η συμβολοσειρά 00^* .

Άσκηση 5.

(α) Έστω $G : S \rightarrow aA, A \rightarrow a \mid aA \mid B, B \rightarrow bb \mid bbB$. Περιγράψτε σε φυσική γλώσσα τη γλώσσα που παράγει η G .

(β) Περιγράψτε αυτόματο για τη γλώσσα $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{το πλήθος των } 1 \text{ στο } w \text{ είναι ίσο με αυτό των } '0' \}$.

Άσκηση 6.

(α) Αποδείξτε ότι η κλάση των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστή ως προς τις πράξεις **ένωση, παράθεση και άστρο του Kleene**.

(β) Τι ισχύει για τις πράξεις της **αναστροφής** και του **συμπληρώματος**;

Υπόδειξη: υποθέστε ότι για γλώσσες L_1, L_2 έχουμε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα και σκεφτείτε αν και πώς μπορούμε να βρούμε γραμματικές χ.σ. και για τις $L_1 \cup L_2, L_1^*, L_1^R$ και \bar{L}_1 .

Εξάσκηση σε αυτόματα

Εξασκηθείτε στο σχεδιασμό και κατανόηση λειτουργίας των DFA, NFA και NFA_ϵ χρησιμοποιώντας το εργαλείο που θα βρείτε στη σελίδα <http://automata.discrete.gr/> (Ευχαριστίες στους δημιουργούς, απόφοιτους της ΣΗΜΜΥ, Μανόλη Ζαμπετάκη και Διονύση Ζήνδρο).

Επαληθεύστε την ορθή λειτουργία των αυτομάτων που σχεδιάσατε στις προηγούμενες ασκήσεις (όπου γίνεται) με χρήση του εργαλείου αυτού.

Προαιρετικά: ελάτε σε επαφή με τους δημιουργούς της εφαρμογής για να συμβάλετε στην ανάπτυξη νέων λειτουργιών ή/και βελτίωση του interface.

Προθεσμία υποβολής και οδηγίες. Η σειρά αυτή θα συμπληρωθεί σύντομα με κάποιες ασκήσεις ακόμη. Οι απαντήσεις θα πρέπει να υποβληθούν έως τις 12/11/2021, αποκλειστικά σε ηλεκτρονική μορφή, στο Helios (φροντίστε το τελικό αρχείο να είναι μεγέθους <5MB συνολικά).

Συνιστάται *θερμά* να αφιερώσετε ικανό χρόνο για να λύσετε τις ασκήσεις μόνοι σας προτού καταφύγετε σε οποιαδήποτε *θεμιτή* βοήθεια (διαδίκτυο, βιβλιογραφία, συζήτηση με συμφοιτητ(ρι)ες σας). Σε κάθε περίπτωση, οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι *αυστηρά* ατομικές.

Για να βαθμολογηθείτε θα πρέπει να παρουσιάσετε σύντομα τις λύσεις σας (διαδικτυακά) σε ημέρα και ώρα που θα ανακοινωθεί αργότερα.

Για απορίες / διευκρινίσεις: στείλτε μήνυμα στη διεύθυνση focs@corelab.ntua.gr.